

Phys. sp.
735
m

Phys. sp. 735^m₌

Weber

WILHELM WEBER,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

**ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN**

INSBESONDERE

WIDERSTANDSMESSUNGEN.

Aus den Abhandlungen der mathematisch - physischen Classe der Königlich Sächsischen
Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

*N. 5
in alphabetischer*

vid. Verzeichnis

LEIPZIG,

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1850.

and the first

of the first

**ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN**

INSBESONDERE
WIDERSTANDSMESSUNGEN

VON
WILHELM WEBER.

WIDERSTANDSMESSUNGEN
INSBESONDERE
MASSBESTIMMUNGEN
ELEKTRODYNAMISCHE



I.

WIDERSTANDSMESSUNGEN NACH EINEM GEGEBENEN GRUNDMAASSE.

1.

Die Ausführung der Widerstandsmessungen setzt, wie die Ausführung anderer Messungen, dreierlei voraus, nämlich erstens eine Definition der zu messenden Grössenart, zweitens ein bestimmtes Maass und drittens eine Methode zur Vergleichung der Grössen dieser Art unter einander.

Erstens die Definition des Widerstandes, von welchem hier gehandelt wird, lässt sich auf folgende Weise aussprechen. Nach den von Ohm aufgestellten Gesetzen der galvanischen Kette hat bei unverändertem geschlossenem Leiter der Quotient aus der gemessenen elektromotorischen Kraft und aus der gemessenen Stromintensität immer gleichen Werth und dieser Werth hängt bloss von der Grösse und Beschaffenheit des Leiters ab. Dies vorausgesetzt, wird nun Dasjenige, was in der Grösse und Beschaffenheit des Leiters liegt und wovon der Werth jenes constanten Quotienten abhängt, mit dem Namen des Widerstandes des Leiters bezeichnet und als eine jenem Quotienten proportionale Grösse betrachtet. Hierdurch ist die Möglichkeit von Widerstandsmessungen vermittelt der Bestimmung jenes Quotienten gegeben.

Was zweitens das Maass des Widerstandes betrifft, so soll hier das von Jacobi in Petersburg aufgestellte und unter dem 30. August 1846 mit folgenden Bemerkungen an Herrn Professor Pogendorff in Berlin übersendete Grundmaass angenommen werden. Herr Jacobi schreibt: «Ich habe mich schon bei einer früheren Gelegenheit darüber geäussert, wie interessant und wichtig es wäre, wenn die Physiker bei ihren galvanischen Untersuchungen ihre Strom-

messungen nach elektrolytischem, also absolutem Maasse angäben. Es wäre dazu nur nöthig, die Boussolen, mit denen man arbeitet, auf elektrolytische Actionen zu beziehen, um durch Publicierung der angestellten Versuche Auskunft über den Grad der Genauigkeit zu geben, den das gewählte Instrument oder die gewählte Methode gewährt. Indessen behalte ich, dieses näher zu erörtern, einer andern Gelegenheit vor. Nicht minder wichtig, als die Absolutheit der Strommessungen, ist es, wenn die Physiker das Maass der Leitungswiderstände, die sie messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit ausdrücken. Hier aber kann keine absolute Bestimmung stattfinden, weil es scheint, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede stattfinden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden können. Gesetzt also, Sie hätten Ihre Widerstandsmesser und Multiplicatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezogen, so hätten wir immer noch nicht die Ueberzeugung, ob Ihr Kupferdraht und der unsrige einen gleichen Widerstandcoefficienten besitzen. Alle diese Schwierigkeiten nun werden gehoben, wenn man einen beliebig gewählten Kupfer- oder andern Draht bei den Physikern umherwandern lässt und diese bittet, ihre Widerstandsmessinstrumente darauf zu beziehen und ihre Messungen künftig nur nach diesem Maasse anzugeben. Herr Professor Magnus wird Ihnen also ein kleines schwarzes, mit zwei Schrauben versehenes Kistchen überreichen, in welchem ein auf einem Brete aufgewundener Kupferdraht durch einen aus Wachs und Harz bestehenden Mastix eingekittet und vor Nässe und Feuchtigkeit geschützt ist. Diesen Widerstands-Etalon bitte ich mit Ihren Widerstandsmessern zu vergleichen, zu einem solchen Vergleiche aber auch Herrn Professor Weber und andere Physiker, die sich mit galvanometrischen Messungen beschäftigen, aufzufordern. Der Kupferdraht, der in diesem Kästchen befindlich ist, ist zwischen den Schrauben genau 25' russisch-englisch lang, wiegt 22^{gr},5495 und seine Dicke beträgt nach den mit einem guten Münchener, mit Mikrometer versehenen Mikroskope gemachten Messungen an einem Ende 0"0265 englisch und am andern 0"0260, im Mittel also 0"02625 englisch. Diese Messungen selbst sind das Mittel aus 3 sehr nahe übereinstimmenden Beobachtungen. Bemerken will ich noch, dass die gewogene Drahtlänge 25¹/₈' betrug (also 25¹/₈' = 22^{gr},5495), und dass $\frac{3}{4}$ " auf jeder Seite an den Schrauben angelöthet sind. In französischem Maasse ausgedrückt, würde

die Länge des Drahtes $25' = 7^m,61975$ und seine Dicke $0''02625 = 0^m000667$ sein.»

Was endlich drittens die Vergleichung des Widerstandes zweier Leiter oder die Bestimmung ihres Widerstandsverhältnisses betrifft, zum Beispiel die Vergleichung einer Copie mit dem gegebenen Grundmaasse, so sind dazu zwei Instrumente nebst mehreren Leitern erforderlich, nämlich 1) ein Elektromotor, mit welchem galvanische Ströme erregt werden, 2) ein Galvanometer, mit welchem die Intensität der erregten Ströme gemessen wird. In dem ersten Instrumente bildet derjenige Leiter, in welchem der Strom erregt wird, in dem zweiten Instrumente derjenige Leiter, durch welchen der Strom gehen muss, um gemessen zu werden, einen wesentlichen Bestandtheil. Fügt man zu diesen beiden in den beiden Instrumenten schon enthaltenen Leitern noch diejenigen hinzu, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, so hat man eine vollständige Uebersicht aller zu einer Widerstandsvergleichung nothwendigen Hilfsmittel. Nach dieser Uebersicht sollen nun 1) der bei den folgenden Versuchen gebrauchte Elektromotor, 2) das Galvanometer, 3) die Leiter und deren Combinationen besonders betrachtet werden.

2.

Der Elektromotor.

Bei der Wahl des Elektromotors kommt es hauptsächlich auf die Entscheidung darüber an, ob man sich fortdauernder oder momentaner Ströme bedienen will. Im ersteren Falle leuchten die Vorzüge der sogenannten constanten Säulen, wie sie von Daniell, Grove und Bunsen angegeben worden sind, zum Zweck solcher Messungen von selbst ein. Im zweiten Falle dagegen bedient man sich zur Stromerregung mit weit grösserem Vortheile der Induction beharrlicher Magnete, weil es bei der Anwendung momentaner Ströme weder auf die Intensität dieser Ströme, noch auf die Dauer derselben allein, sondern auf den Werth des Products beider ankommt, welches man den Integralwerth der Stromintensität nennen kann. Dieser Integralwerth kann aber nur auf dem Wege der Induction durch beharrliche Magnete in immer gleicher Grösse dargestellt werden.

Bei den folgenden Versuchen ist den momentanen Strömen und folglich der magnetischen Induction der Vorzug gegeben worden aus

folgenden zwei Gründen. **E r s t e n s** gewährt bei feinen Messungen die Anwendung metallischer Leiter, z. B. die Anwendung von lauter Kupferdrähten, ohne dass ein feuchter Leiter, wie Wasser, Säure oder eine Salzlösung, in die Kette eingeschaltet zu werden braucht, eine weit grössere Sicherheit. Es ist bekannt, dass die Polarisationserscheinungen an den in einen feuchten Leiter eingetauchten metallischen Oberflächen die Messungen stören. Solche Störungen vermeidet man durch Anwendung geschlossener Drahtketten, in denen man Ströme induciert, indem man sie gegen beharrliche Magnete bewegt. Jede Wiederholung einer solchen Bewegung bringt einen Strom von dem nämlichen Integralwerthe hervor, so kurz auch die Dauer desselben sei. **Z w e i t e n s** würde bei Anwendung fortdauernder Ströme, wie sie mit constanten Säulen erhalten werden, die Temperatur der Leiter, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, steigen und dieses Steigen in den verschiedenen Leitern verschieden sein. Mit der Temperatur wächst aber der Widerstand der Leiter und diese Veränderlichkeit des Widerstandes würde die Bestimmung des Widerstandsverhältnisses unsicher machen, was durch die Anwendung momentaner Ströme, welche von so kurzer Dauer sind, dass gar keine merkliche Temperaturänderung eintreten kann, vermieden wird.

Die zweckmässige Einrichtung und der Gebrauch magnetischer Inductoren zu Messungen im Allgemeinen ist bei einer andern Gelegenheit schon erörtert worden. Siehe darüber «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838.» S. 86. Die besondere Einrichtung, welche dem bei den folgenden Versuchen gebrauchten Inductor gegeben worden war, findet man am Ende dieser Abhandlung in Beilage A genauer beschrieben und daselbst in Fig. 4 abgebildet.

3.

Das Galvanometer.

Zur Messung der Intensität eines fortdauernden Stromes kann man sich sowohl der sogenannten Sinusboussole als auch der Tangenteboussole bedienen; um aber die Intensität eines inducierten momentanen Stromes, d. h. die Stärke eines sogenannten Inductionsstosses, zu messen, kann man sich nur der Tangenteboussole bedienen, weil der Gebrauch der Sinusboussole ein Beharren der Nadel in ihrer ab-

gelenkten Lage voraussetzt, was bei einem Inductionsstosse nicht der Fall ist; denn die Nadel wird durch einen Inductionstoss, welchen sie in ihrer Ruhelage erhält, bloss in Schwingung gesetzt und erhält dadurch keine bleibende Ablenkung. Am genauesten und bequemsten lassen sich die Elongationen der durch Inductionsstösse erregten Nadel-schwingungen an einem mit Multiplicator versehenen Magnetometer beobachten, wozu Gauss die Anleitung in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837» gegeben hat. Nur ist zu beachten, dass zu den vorliegenden Messungen ein grosser Multiplicator mit grossem Leitungswiderstande, womit gewöhnlich die grösseren Magnetometer versehen sind, von Nachtheil sein würde. Zu den folgenden Versuchen wurde daher ein Magnetometer von sehr kleinen Dimensionen, dessen Nadel nur 100 Millimeter lang war, gebraucht, welches mit einem kleinen Multiplicator von mässigem Widerstande versehen war.

Die Ausführung der Beobachtungen, zumal wenn sie oft und schnell hinter einander wiederholt werden sollen, wird sehr erleichtert, wenn das Magnetometer ausser mit dem Multiplicator auch mit einem starken Dämpfer versehen wird, welcher die in Schwingung versetzte Nadel nach einer kleinen Zahl von Schwingungen zur Ruhe zurückführt. Da die Wirksamkeit dieses Dämpfers hauptsächlich auf der magnetischen Kraft der schwingenden Nadel beruht, so muss man dazu das Magnetometer mit einer sehr stark magnetisierten Nadel versehen. Zugleich ist es aber nöthig, dass die Schwingungsdauer der Nadel nicht unter 10 bis 12 Secunden betrage, wenn die Beobachtungen mit Genauigkeit ausgeführt werden sollen. Diesen Zweck kann man auch bei einer starken Magnetisierung der Nadel dadurch erreichen, dass man der Nadel eine verhältnissmässig zu ihrer geringen Länge grosse Dicke giebt, z. B. von 15 Millimeter bei 100 Millimeter Länge. Die genauere Beschreibung des hier gebrauchten Galvanometers findet man am Ende der Abhandlung in Beilage *B*, wo auch in Fig. 2. 3. 4. eine Abbildung gegeben ist.

4.

Combinationen der vier Leiter.

Die vier Leiter sind der Inductordraht, der Multiplicator-draht, der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der

Draht der Copie. Von diesen vier Leitern sind die beiden ersten zu allen Versuchen nothwendig und bilden die Kette entweder allein oder zusammen mit dem einen oder mit den beiden anderen Drähten, wobei folgende Combinationen stattfinden können.

1) Die Enden des Inductor- und Multiplicatordrahtes werden unmittelbar mit einander verbunden, und diese beiden Drähte bilden allein die Kette.

2) Die vorige Kette wird an einer Stelle gelöst und daselbst der Draht des Original-Widerstandsmaasses eingeschaltet.

3) Statt des Drahtes des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Copie eingeschaltet.

4) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden an einander gesetzt und in die Kette hinter einander eingeschaltet.

5) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden neben einander gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, in die Kette eingeschaltet.

6) Die Enden des Inductor- und Multiplicatordrahtes werden mit einander unmittelbar verbunden, bilden aber nicht wie unter (1) die Kette allein, sondern zwischen ihre beiden Verbindungsstellen wird der Draht des Original-Widerstandsmaasses eingeschaltet, so dass der vom Inductordrahte zugeleitete Strom zwischen diesem letzteren und dem Multiplicatordrahte getheilt wird.

7) Statt des Drahtes des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Copie zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

8) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden an einander gesetzt und zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

9) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden neben einander gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

Von diesen 9 verschiedenen Combinationen sind nur die 4 letzten bei den folgenden Versuchen benutzt worden, weil bei den 5 ersten die Wirkung zu stark war, um die Elongation der Nadel mit derselben Scale zu messen. Die Berechnung der Beobachtungen wird jedoch nachher zeigen, dass schon 3 von jenen Combinationen zur Bestimmung

des Widerstandsverhältnisses des Originals und der Copie genügen und die vierte bloss zur Controle der Genauigkeit der Messung dient.

5.

Beobachtungsmethoden.

Die Anwendung der beschriebenen Instrumente zu den Beobachtungen lässt sich nach verschiedenen Methoden machen, die sich theils durch ihre Genauigkeit, theils durch ihre Bequemlichkeit, theils durch die Regeln, nach welchen die Beobachtungen zu berechnen sind, von einander unterscheiden. Statt der einfachen Beobachtung der Elongation der Nadel, nachdem sie von der Ruhe ab durch einen Inductionsstoss in Bewegung gebracht worden ist, lässt sich mit grossem Vortheil ein System von Elongationsbeobachtungen ausführen, während der Nadel in vorgeschriebenen Augenblicken wiederholte Inductionsstösse ertheilt werden. Für diese Wiederholungen lässt sich allgemein die Regel aufstellen, dass alle Inductionsstösse nur in solchen Augenblicken stattfinden dürfen, wo die schwingende Nadel die Lage passiert, in welcher sie ruhend beharren würde. Es ist dies nämlich die nothwendige Bedingung, wenn die Berechnung der Beobachtungen auf einfache Regeln gebracht werden soll.

Zum Zwecke aller feineren galvanischen Messungen, sowohl in Beziehung auf fortdauernde, als auch auf momentane Ströme, ist es von Wichtigkeit, von den verschiedenen Methoden der Anordnung der Beobachtungen und Versuche und von deren Berechnung eine klare Uebersicht zu erhalten und insbesondere, wenn das Galvanometer wie in unserm Falle mit einem Dämpfer versehen ist, die Regeln kennen zu lernen, nach denen die Beobachtungen berechnet werden müssen, wenn der Einfluss der Dämpfung berücksichtigt werden soll. Um jedoch hier nicht bei einer Zusammenstellung der verschiedenen Beobachtungsmethoden und der ihnen entsprechenden Berechnungsarten zu verweilen, soll dieselbe am Ende der Abhandlung in der Beilage C gegeben werden, wo insbesondere der Unterschied der hier gebrauchten Multiplicationsmethode und Zurückwerfungsmethode näher erörtert werden wird, die beide zulässig sind, wenn momentane Ströme angewendet werden. Die ersten hier anzuführenden Beobachtungsreihen sind nach der Multiplicationsmethode ausgeführt worden.

6.

Beobachtungen.

Die Nadel im Galvanometer war Anfangs in Ruhe und ihr Stand wurde an der Scale beobachtet. Der erste positive Inductionsstoss ertheilte darauf der Nadel eine positive Geschwindigkeit, und es wurde die grösste Elongation oder der höchste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der zweite negative Inductionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die zurückschwingende Nadel den Ruhestand passierte, und es wurde der niedrigste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der dritte wieder positive Inductionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel den Ruhestand passierte, und es wurde nun wieder der höchste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Auf diese Weise wurden die Beobachtungen in der Regel bis zum 12^{ten} Inductionsstosse fortgesetzt und zuletzt, als die Nadel wieder zur Ruhe gekommen, ihr Stand an der Scale nochmals bemerkt. Dergleichen Beobachtungsreihen wurden nun bei den verschiedenen Combinationen der Drähte mehrmals hinter einander gemacht. Diese verschiedenen Reihen sollen nun mit *A*, *B*, *C*, *D* bezeichnet werden, so dass *A* sich auf die 6^{te}, *B* auf die 7^{te}, *C* auf die 9^{te} und *D* auf die 8^{te} der oben angeführten Combinationen der Leiter bezieht. Folgende Tafel giebt die Uebersicht der nach diesen Reihen geordneten Beobachtungen.

	<i>D.</i>	<i>C.</i>	<i>B.</i>	<i>A.</i>	<i>B.</i>	<i>A.</i>	<i>B.</i>	<i>C.</i>	<i>D.</i>
Stand	494,8	492,9	493,2	493,7	493,7	493,0	494,3	494,1	494,3
1.	821,8	587,8	672,7	676,3	673,2	675,3	673,1	588,8	821,2
2.	88,3	376,1	271,8	268,8	272,2	268,1	273,1	377,8	88,1
3.	918,0	614,6	723,3	726,7	724,1	726,6	724,4	614,7	916,2
4.	64,5	370,5	260,4	257,0	260,9	257,5	261,9	372,7	64,5
5.	922,9	616,3	725,7	731,1	726,7	729,5	726,7	616,9	923,2
6.	64,0	369,8	259,5	256,1	259,9	257,5	261,7	371,9	62,9
7.	923,3	616,4	726,0	730,7	726,3	730,2	727,2	617,2	922,7
8.	63,4	369,8	259,6	256,2	259,9	257,3	261,6	371,6	62,6
9.	922,5	616,6	726,2	730,8	726,5	730,5	727,2	617,8	923,7
10.	62,9	370,2	259,2	255,7	260,0	257,5	261,9	371,5	61,7
11.	922,9	616,5	724,2	731,1	725,9	730,9	726,9	617,7	923,3
12.	61,9	370,2	262,7	255,7	260,3	257,2	261,7	371,6	62,9
Stand	492,7	493,2	493,6	493,7	492,9	494,2	494,1	494,3	493,7

Die Beobachtungen sind in dieser Tafel nach der Reihenfolge geordnet, wie sie unmittelbar nach einander in einem Zeitraume gemacht worden sind, welcher keine ganze Stunde betrug. Die Wiederholungen der nämlichen Beobachtungsreihen sind so symmetrisch gestellt, dass die kleineren, von der Zeit abhängigen Einflüsse (z. B. der Einfluss der Variation der erdmagnetischen Directionskraft) durch Combination derselben fast ganz eliminiert werden können.

Aus obiger Tafel der unmittelbaren Ablesungen ergiebt sich die folgende Tafel, wenn man 1) von jeder an der Scale abgelesenen Zahl den Mittelwerth des zu Anfang und am Ende der Reihe beobachteten Ruhestandes abzieht; 2) von allen correspondierenden Beobachtungen der mit *A*, oder der mit *B*, oder der mit *C*, oder der mit *D* bezeichneten Reihen den Mittelwerth sucht, und 3) diese Mittelwerthe der an der Scale beobachteten Ablenkungen, welche nach der Theorie des Magnetometers den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional sind, so reducirt, dass sie den Ablenkungswinkeln selbst proportional werden. Dabei ist zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Scale 2150 Scalentheile betrug, wonach, wenn x den beobachteten Werth bezeichnet, der reducirte Werth erhalten wird, wenn man den beobachteten um $\frac{x^3}{43867500}$ verkleinert.

Nr.	<i>D.</i>	<i>C.</i>	<i>B.</i>	<i>A.</i>
1.	+ 325,05	+ 94,64	+ 178,96	+ 181,72
2.	— 400,87	— 116,53	— 220,49	— 224,38
3.	+ 417,74	+ 120,92	+ 229,42	+ 232,09
4.	— 423,70	— 121,87	— 231,67	— 235,45
5.	+ 423,45	+ 122,87	+ 231,82	+ 235,69
6.	— 424,22	— 122,62	— 232,36	— 235,89
7.	+ 423,40	+ 123,07	+ 231,96	+ 235,84
8.	— 425,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 423,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 425,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 423,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 425,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24

Man sieht in dieser Tafel, dass die beobachteten Elongationen der Magnetnadel im Galvanometer zwar Anfangs schnell wachsen, sich aber bald einem Grenzwerte nähern, in Folge des mit der Schwingungsweite

der Nadel wachsenden Einflusses des Dämpfers, mit welchem das Galvanometer versehen war. Um alle einzelnen Beobachtungen auf diesen Grenzwert zu reducieren, musste das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbögen bestimmt werden, wozu besondere Versuche unmittelbar vor und nach obiger Beobachtungsreihe gemacht worden waren. Das logarithmische Decrement hatte sich aus diesen Versuchen im Mittel ergeben

$= 0,63395$,
oder es verhalten sich zwei auf einander folgende Elongationen der Nadel wie $1 : 0,2323$.

Da die Abweichungen von diesem Mittelwerthe für die einzelnen Reihen nicht gross sind, so genügt es, diesen Mittelwerth statt der wahren Werthe hier in Rechnung zu bringen. Hiernach wird nun die erste Beobachtung auf den Grenzwert reducirt, indem man sie nach dem Verhältnisse von $0,7677 : 1$,

und die n^{te} Beobachtung, indem man sie nach dem Verhältnisse von $(1 - 0,2323^n) : 1$

vergrössert. Folgende Tafel giebt die Uebersicht dieser reducirten Werthe und die für A, B, C, D daraus gezogenen Mittel.

	<i>D.</i>	<i>C.</i>	<i>B.</i>	<i>A.</i>
1.	+ 423,41	+ 123,28	+ 233,11	+ 236,71
2.	— 423,73	— 123,18	— 233,07	— 237,18
3.	+ 423,05	+ 122,46	+ 232,33	+ 235,04
4.	— 424,93	— 122,22	— 232,34	— 236,13
5.	+ 423,73	+ 122,95	+ 231,98	+ 235,85
6.	— 424,29	— 122,64	— 232,40	— 235,93
7.	+ 423,42	+ 123,07	+ 231,97	+ 235,85
8.	— 425,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 423,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 425,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 423,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 425,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24
Mittel	$\pm$ 424,19	$\pm$ 122,80	$\pm$ 232,19	$\pm$ 236,13

Dieselbe Versuchsreihe ist auf gleiche Weise 3 Mal, an 3 auf einander folgenden Tagen, gemacht worden, und die folgende Tafel giebt die Uebersicht der aus allen 3 Versuchsreihen gefundenen Werthe von A, B, C, D .

	<i>D.</i>	<i>C.</i>	<i>B.</i>	<i>A.</i>
I.	424,19	422,80	232,19	236,13
II.	424,80	423,27	232,25	235,93
III.	423,00	422,59	231,38	235,53
Mittel	424,00	422,89	231,94	235,86

7.

Berechnung der Beobachtungen.

Durch die eben beschriebenen Beobachtungen sind die 4 mit *A, B, C, D* bezeichneten Werthe genau bestimmt worden, und es fragt sich nun ferner, wie aus diesen 4 Werthen das gesuchte Widerstandsverhältniss des Original-Widerstandsmaasses *a* zu der Copie *b* abgeleitet werden könne? Der Einfachheit wegen werde zunächst angenommen, dass der von der Kette selbst herrührende Theil der Dämpfung gegen den von der Kette unabhängigen Theil so klein sei, dass er vernachlässigt werden, folglich die Dämpfung für alle Beobachtungen *A, B, C, D* gleich angenommen werden dürfe. Für diesen Fall überzeugt man sich leicht, dass die reducierte Elongationsbeobachtung der Geschwindigkeit proportional ist, welche der Nadel des Galvanometers in dem Augenblicke, wo sie den Ruhestand passiert, durch den von einem Inductionsstosse herrührenden Strom im Multiplicator des Galvanometers ertheilt wird, und dass jene Geschwindigkeit selbst dem Integralwerthe dieses Stroms proportional ist. Hiernach können die beobachteten Elongationen als Maasse dieser Ströme benutzt werden.

Der durch den Multiplicator des Galvanometers gehende und gemessene Strom war aber bei obigen Versuchen nicht der ganze Strom, welcher durch einen Inductionstoss im Inductor hervorgebracht wurde, sondern nur ein Bruchtheil desselben, welcher nach dem Gesetze der Stromtheilung ausgedrückt wird durch das Verhältniss des Widerstandes des eingeschalteten Drahtes zur Summe der Widerstände des eingeschalteten Drahtes und des Multiplicatordrahtes. Bezeichnet *m* den Widerstand des Multiplicatordrahtes, *a* den Widerstand des Grundmaasses und *b* den Widerstand der Copie, so ist der Widerstand der eingeschalteten Drähte

für die Beobachtung $A. = a$

$$B. = b$$

$$C. = \frac{ab}{a+b}$$

$$D. = a+b$$

und folglich die entsprechenden Bruchtheile

$$\text{für } A. = \frac{a}{a+m}$$

$$,, B. = \frac{b}{b+m}$$

$$,, C. = \frac{ab}{ab+am+bm}$$

$$,, D. = \frac{a+b}{a+b+m}$$

Der ganze Strom wird aber, nach dem Ohmschen Gesetze, durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler K für alle Versuche gleich ist und von der einem Inductionsstosse entsprechenden elektromotorischen Kraft abhängt, während der Nenner durch den Widerstand der Kette, durch welche der Strom geht, gegeben ist. Bezeichnet man den Widerstand des Inductordrahtes mit r , so ergibt sich der Widerstand der ganzen Kette

$$\text{für die Beobachtung } A. = r + \frac{am}{a+m}$$

$$,, B. = r + \frac{bm}{b+m}$$

$$,, C. = r + \frac{abm}{ab+am+bm}$$

$$,, D. = r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}$$

Man erhält hiernach folgende Gleichungen für die mit dem Galvanometer beobachteten Stromintensitäten, welche mit A, B, C, D bezeichnet werden sollen:

$$A = \frac{a}{a+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{am}{a+m}} = \frac{aK}{am + ar + mr}$$

$$B = \frac{b}{b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{bm}{b+m}} = \frac{bK}{bm + br + mr}$$

$$C = \frac{ab}{ab+am+bm} \cdot \frac{K}{r + \frac{abm}{ab+am+bm}} = \frac{abK}{ab(m+r) + (a+b)mr}$$

$$D = \frac{a+b}{a+b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}} = \frac{(a+b)K}{(a+b)(m+r) + mr}$$

Setzt man hierin Kürze halber

$$\frac{1}{mr} \cdot K = \alpha, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta$$

so ergibt sich:

$$A\left(\beta + \frac{1}{a}\right) = B\left(\beta + \frac{1}{b}\right) = C\left(\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = D\left(\beta + \frac{1}{a+b}\right) = \alpha$$

und hieraus:

$$\frac{\frac{1}{b}B - \frac{1}{a}A}{A-B} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)C - \frac{1}{a}A}{A-C} = \frac{\frac{1}{a+b}D - \frac{1}{a}A}{A-D} = \beta$$

woraus zur Bestimmung des gesuchten Widerstandsverhältnisses der Copie zum Grundmaasse $b : a$ folgende zwei Gleichungen erhalten werden:

$$(a-b)AB - aAC + bBC = 0$$

$$(aa-bb)AB + bbAD - aaBD = 0$$

oder:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB-AC}{AB-BC}$$

$$\frac{bb}{aa} = \frac{AB-BD}{AB-AD}$$

Zwischen den 4 Beobachtungen A, B, C, D findet also, den Ohmschen Gesetzen gemäss, folgende Relation statt:

$$\frac{A^2}{B^2} = \left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2 \cdot \frac{A-D}{B-D}$$

welche sich ergibt, wenn man a und b aus den vorhergehenden Gleichungen eliminiert.

Nach der gegebenen Entwicklung gelten die hier aufgestellten Formeln zunächst nur für diejenigen Fälle, wo die Beobachtungen A, B, C, D die inducierten und durch den Multiplicator gehenden Ströme nach gleichem Maasse ausgedrückt geben, d. i. wo die Dämpfung der Galvanometernadel für die verschiedenen Beobachtungen nicht merklich verschieden ist. Diese Formeln bedürfen aber noch einer besondern Prüfung, um sie auch auf die übrigen Fälle anzuwenden, in welchen die Dämpfung variiert, weil dann nämlich die beobachteten Elongationen A, B, C, D , wie man leicht einsieht, zwar ebenfalls der Stromstärke proportional, ausserdem aber der Stärke der Dämpfung umgekehrt proportional sind.

Die Dämpfung besteht nun aus einem für alle Beobachtungen constanten Theile, welcher von dem unveränderlichen ringförmigen Dämpfer, mit welchem das Galvanometer versehen ist, herrührt und $= 1$ gesetzt werden möge, und aus einem variablen, von der Schliessung des Multiplicators abhängigen Theile, welcher dem Widerstande der vom Multiplicator ausgehenden und zu ihm zurückkehrenden Kette umgekehrt proportional ist. Der Widerstand dieser Kette ist aber:

$$\text{für } A. = m + \frac{ar}{a+r}$$

$$,, B. = m + \frac{br}{b+r}$$

$$,, C. = m + \frac{abr}{ab+ar+br}$$

$$,, D. = m + \frac{(a+b)r}{a+b+r}$$

es kann folglich der variable Theil der Dämpfung dargestellt werden, wenn man $\frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta$ setzt und γ einen constanten Factor bezeichnet,

$$\text{für } A. \text{ durch } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}{\beta + \frac{1}{a}}$$

$$,, B. \text{ „ } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{b}}$$

$$,, C. \text{ „ } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$,, D. \text{ „ } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}}{\beta + \frac{1}{a+b}}$$

Für die Fälle nun, wo dieser variable Theil der Dämpfung gegen den constanten $= 1$ nicht vernachlässigt werden darf, müssen in den oben entwickelten Formeln statt A, B, C, D ihre Producte in die zugehörigen Werthe der Dämpfung gesetzt werden, d. h.

$$\text{statt } A \text{ ist zu setzen } A \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}{\beta + \frac{1}{a}} \right)$$

$$,, B \text{ „ „ } B \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{b}} \right)$$

$$,, C \text{ „ „ } C \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right)$$

$$,, D \text{ „ „ } D \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}}{\beta + \frac{1}{a+b}} \right)$$

Durch diese Substitution erhält man aber:

$$\begin{aligned} A \left[\beta + \frac{1}{a} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \right] &= B \left[\beta + \frac{1}{b} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} \right) \right] = C \left[\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \\ &= D \left[\beta + \frac{1}{a+b} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b} \right) \right] = \alpha \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\frac{A(\beta + \frac{1}{a}) - B(\beta + \frac{1}{b})}{B(\frac{1}{r} + \frac{1}{b}) - A(\frac{1}{r} + \frac{1}{a})} = \frac{A(\beta + \frac{1}{a}) - C(\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b})}{C(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}) - A(\frac{1}{r} + \frac{1}{a})}$$

$$= \frac{A(\beta + \frac{1}{a}) - D(\beta + \frac{1}{a+b})}{D(\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}) - A(\frac{1}{r} + \frac{1}{a})} = \gamma$$

woraus

$$AB(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + AC(\beta - \frac{1}{r})\frac{1}{b} - BC(\beta - \frac{1}{r})\frac{1}{a} = 0$$

$$AB(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + AD(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a}) - BD(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b}) = 0$$

folgt, oder, indem der gemeinschaftliche Factor $(\beta - \frac{1}{r})$ herausfällt, die nämlichen Gleichungen wie früher erhalten werden, nämlich:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC}$$

$$\frac{bb}{aa} = \frac{AB - BD}{AB - AD}$$

Wendet man endlich die gefundenen Regeln auf die Werthe von A, B, C, D an, welche sich aus den oben beschriebenen Versuchen ergeben haben, nämlich:

$$A = 235,86$$

$$B = 231,94$$

$$C = 122,89$$

$$D = 424,00,$$

so ergibt sich zuvörderst:

$$\frac{A^3}{B^3} = 1,05156$$

$$\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2 \cdot \frac{A-D}{B-D} = 1,05128.$$

Die nahe Uebereinstimmung dieser beiden Werthe, welche nach obigen Regeln gleich sein sollten, kann als Bestätigung der Ohmschen Gesetze dienen, aus denen jene Regeln abgeleitet sind.

Ferner ergibt sich daraus das Widerstandsverhältniss der Copie b zum Grundmaasse a , und zwar aus den beobachteten Werthen A, B, C :

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC} = 0,981616,$$

aus den beobachteten Werthen A, B, D :

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{AB - BD}{AB - AD}} = 0,981485;$$

im Mittel also ist der Widerstand der Copie, in Theilen des Widerstandes des gegebenen Grundmaasses ausgedrückt,

$$= 0,98155.$$

Auf die nämliche Weise, wie hier das Widerstandsverhältniss der Copie zu dem Grundmaasse bestimmt worden ist, kann nun auch das Widerstandsverhältniss anderer Leiter zum Grundmaasse gefunden und dadurch können die Widerstände aller dieser Leiter nach dem gegebenen Grundmaasse gemessen werden.

Die Anordnung der Beobachtungen war in dem hier gegebenen Beispiele nach der Multiplications-Methode getroffen worden. Es ist aber schon erwähnt worden, dass diese Anordnung noch auf eine andere Weise, nämlich nach der Zurückwerfungsmethode, gemacht werden kann, und es besitzt sogar diese letztere Anordnungsweise einige Vorzüge vor der ersteren. Es verdient daher diese zweite Methode näher erörtert zu werden, was in der Beilage C. am Ende dieser Abhandlung geschehen soll, wo auch ein Messungsbeispiel nach dieser Methode beigelegt werden wird.

II.

ZURÜCKFÜHRUNG DER WIDERSTANDSMESSUNGEN AUF
ABSOLUTES MAASS.

8.

Nachdem im ersten Abschnitte gezeigt worden ist, wie der Widerstand eines Leiters mit der erforderlichen Schärfe nach einem gegebenen Grundmaasse bestimmt werden kann, soll nun im zweiten Abschnitte die Zurückführung dieser Messungen auf absolutes Maass erfolgen werden.

Man könnte glauben; dass sich eine solche Zurückführung auf die einfachste Weise dadurch bewerkstelligen lasse, dass man auf die natürlichen Dimensionen (Länge und Querschnitt) der Leiter zurückgeht und sich dabei an dasjenige Metall halte, was zu den Leitern am besten passt und am häufigsten dazu gebraucht wird, an das Kupfer. In der That würde man auf diese Weise zu Widerstandsbestimmungen gelangen, welche dem Namen nach als absolute bezeichnet werden könnten, die aber in der That dem wahren Zwecke, die Zahl der willkürlich anzunehmenden Grundmaasse zu vermindern, nicht entsprechen würden. Es würde dadurch nur an die Stelle eines Grundmaasses für absoluten Widerstand ein Grundmaass für specifischen Widerstand (nämlich der des Kupfers) gesetzt werden. Für den angeführten Zweck ist es aber gleichgültig, ob man ein Maass des specifischen Widerstandes zum Grunde legt und das Maass des natürlichen Widerstandes daraus ableitet, oder ob man umgekehrt ein Maass des natürlichen Widerstandes zum Grunde legt und daraus das Maass des specifischen Widerstandes ableitet. Absolute Widerstandsmessungen sind nur dann von wesentlicher Bedeutung, wenn sie so ausgeführt werden, dass gar keine neuen, sondern nur vorhandene, zu anderen Zwecken schon gebrauchte und unentbehrliche Maasse, wie z. B. die Längeneinheit und der Zeit, zum Grunde liegen.

Hiernach kann nun leicht Dasjenige beurtheilt werden, was Jacobi in der oben angeführten Stelle S. 199 f. bei Gelegenheit seines Vorschlags in Betreff eines festen Widerstandsmaasses gesagt hat: es könne, um die Leitungswiderstände, welche die Physiker messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit auszudrücken, keine absolute Bestimmung stattfinden, weil es scheine, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede stattfänden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden könnten, und dass also, wenn der eine Physiker seine Widerstandsmesser und Multiplicatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezöge, die andern Physiker immer noch nicht die Ueberzeugung hätten, ob sein Kupferdraht und der ihrige einen gleichen Widerstandcoefficienten (d. i. ob das Kupfer dieser Drähte gleichen specifischen Widerstand) besitze. Man sieht, dass Jacobi hier nur eine solche absolute Bestimmung im Auge hat, bei welcher das Maass des absoluten Widerstandes aus einem für den specifischen Widerstand angenommenen Grundmaasse abgeleitet wird, die er mit Recht verwirft; die Frage aber, ob überhaupt ein neues Grundmaass nöthig sei, oder ob Widerstandsbestimmungen möglich seien, ohne irgend eines von jenen beiden Grundmaassen anzunehmen, hat Jacobi gar nicht berührt. Diese Frage ist es aber gerade, deren Beantwortung uns vorzugsweise beschäftigen wird. Wenn sich übrigens aus dieser Antwort ergeben wird, dass in der That zum Zweck der Widerstandsmessungen gar kein neues Grundmaass nöthig ist, so folgt doch daraus noch keineswegs, dass die Feststellung eines solchen Grundmaasses, wie Jacobi vorgeschlagen und wie es im ersten Theile dieser Abhandlung zur Anwendung gebracht worden ist, ganz überflüssig sei. Es wird vielmehr gezeigt werden, dass die Annahme des Jacobi'schen Vorschlags auch dann noch aus praktischen Gründen höchst wünschenswerth bleibt, weil eine absolute Widerstandsbestimmung sich direct nur in seltenen Fällen unter besonders günstigen Verhältnissen genau ausführen lässt, durch Annahme des Jacobi'schen Vorschlags aber eine Brücke gebaut wird, auf welcher man dazu gelangt, mit Hülfe einer einzigen wirklich ausgeführten absoluten Widerstandsbestimmung alle andern Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zurückzuführen. Dass nun eine absolute Widerstandsbestimmung auf ganz andere Weise möglich sei, als diejenige, von welcher Jacobi spricht, ganz unabhängig von dem

specifischen Widerstande oder von dem Widerstandscoefficienten irgend eines Körpers, wie des Kupfers, nämlich durch eine eigenthümliche Combination magnetoelektrischer und elektromagnetischer Beobachtungen, ist von Gauss ausgesprochen worden, bald nachdem Faraday's Entdeckung der Magnetoelektricität bekannt geworden war.

Das Wesentliche dieser Methode lässt sich auf folgende Weise in Worten ausdrücken: Betrachtet man die Intensität irgend eines elektrischen Stroms, so leuchtet ein, dass dieselbe im Allgemeinen in zwei wesentlich verschiedene Arten bestimmt werden kann: erstens aus den Ursachen, von welchen sie abhängt; zweitens aus den Wirkungen, welche sie hervorbringt. Die aus ihren Wirkungen definierte Stromintensität kann nun aber, wie sich leicht zeigen lässt, auf absolutes Maass zurückgeführt werden, und da einleuchtet, dass der Werth einer Stromintensität nach absolutem Maasse bemessen sein müsse, es möge dieselbe aus ihren Wirkungen oder aus den Ursachen definiert werden, so ist das Resultat, welches auf dem ersten Wege erhalten werden muss, durch das auf dem zweiten Wege schon im Voraus bekannt. Nun weiss man aber, dass die Stromintensität nur von zwei Ursachen abhängt, nämlich von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, und in diesen beiden die elektromotorische Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt werden kann. So wie nun, wenn ausser der elektromotorischen Kraft auch der Widerstand nach absolutem Maasse gegeben ist, der absolute Werth der Stromintensität sich unmittelbar daraus berechnen würde, eben so ergiebt sich umgekehrt, da ausser der elektromotorischen Kraft auch die Stromintensität nach absolutem Maasse ist, der Werth des Widerstandes nach absolutem Maasse, und es folgt hieraus, dass Widerstandsmessungen ausgeführt werden können ohne dass irgend ein neues willkührliches Grundmaass dazu erforderlich wird, was zu beweisen war.

Es folgt nun auch hieraus im Allgemeinen die Möglichkeit eines Widerstandsmaasses in der angegebenen engern Bedeutung zu sein, so ist es doch noch nöthig, eine genaue Definition dieses Maasses zu geben, wenn eine wirkliche Messung nach diesem Maasse geführt werden soll. Eine solche Definition findet aber eine Schwierigkeit darin, dass sie andere absolute Maasse als bekannt voraussetzt, nämlich das absolute Maass für die elektromotorischen Kräfte

und das absolute Maass für die (aus ihren Wirkungen bestimmten) Stromintensitäten. Es handelt sich demnach bei der Begründung eines absoluten Widerstandsmaasses im Grunde um die Feststellung eines vollständigen Systems absoluter Maasse für die ganze Elektrodynamik. Geht man noch weiter zurück, so findet man, dass auch diese letzteren Maasse wieder andere, ausser dem Kreise der Elektrodynamik, voraussetzen, und dass also die beabsichtigte Begründung des Widerstandsmaasses eine nähere Erörterung der absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten nöthig macht, welche der Ausführung unserer Messung vorausgeschickt werden muss.

9.

Über die absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten.

Es ist bekannt, dass es sehr zur Vereinfachung physicalischer Forschungen dient, wenn man für die verschiedenen Grössenarten nicht mehr eigene, von einander unabhängige Grundmaasse einführt, als unumgänglich nöthig sind, und wenn man alle anderen Maasse aus diesen wenigen nothwendigen Grundmaassen ableitet. Aus diesem Grunde werden in der Mechanik bloss für Linien, Zeiträume und Massen Grundmaasse aufgestellt, und die Maasse aller andern in der Mechanik betrachteten Grössenarten werden aus diesen wenigen Grundmaassen abgeleitet und heissen dann absolute Maasse. Zum Beispiel werden keine Grundmaasse für Geschwindigkeit und Dichtigkeit aufgestellt, sondern es werden absolute Maasse dafür gebraucht, welche auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt werden können. Eben so werden die Maasse für die bewegenden und für die absoluten Kräfte, für die Drehungsmomente, Trägheitsmomente, Nutzeffecte u. s. w. nach bekannten Gesetzen auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt. Aus demselben Grunde wird ferner auch für den Magnetismus kein eigenes unabhängiges Grundmaass eingeführt, sondern man hält sich an das absolute Maass, welches Gauss für den Magnetismus aus den drei Grundmaassen der Mechanik in der Abhandlung: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*. Gottingae 1833. abgeleitet hat.

Das Maass für den Stabmagnetismus ist nämlich hiernach der Magnetismus eines solchen Stabs, welcher, — wenn er aus grosser Entfer-

g R auf einen andern gleich stark magnetischen Stab wirkt, dessen magnetische Axe derjenigen Geraden parallel ist, welche die Mittelste der beiden Magnete verbindet, während seine eigene magnetische Axe dagegen senkrecht ist, — ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zum absoluten Maasse des Drehungsmomentes wie $1 : R^3$ hält.

Das Maass für die Stärke des Erdmagnetismus (für die Stärke der magnetischen Kraft) an irgend einem Orte ist eben danach das absolute Maasse ausgedrückte Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf einen an diesem Orte befindlichen Magnetstab ausübt, wenn letzterer das absolute Maass Magnetismus enthält und seine magnetische Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an diesem Orte einen rechten Winkel macht.

40.

Definitionen der absoluten Maasse in der Elektrodynamik.

Die absoluten Maasse der in der Elektrodynamik betrachteten Grössenarten lassen sich nun auf folgende Weise durch Zurückführung auf die magnetischen Maasse kurz und vollständig definieren.

1) Das Maass für die Stromintensitäten.

Das Maass für die Stromintensitäten ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächeninhaltes eines Querschnittes umläuft, nach den elektromagnetischen Gesetzen die nämlichen Wirkungen in die Ferne ausübt, wie ein Magnetstab, welcher das vorher definierte Maass des Magnetismus enthält.

Diese Definition von dem Maasse für die Stromintensitäten ist dieselbe, welche in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 86 gegeben worden ist.

2) Das Maass für die elektromotorischen Kräfte.

Das Maass für die elektromotorischen Kräfte ist diejenige elektromotorische Kraft, welche von dem vorher definierten Maasse des Erdmagnetismus auf eine geschlossene Kette ausgeübt wird, wenn letztere umgedreht wird, dass die von ihrer Projection auf eine gegen die

für die Beobachtung $A. = a$ $B. = b$ $C. = \frac{ab}{a+b}$ $D. = a+b$

und folglich die entsprechenden Bruchtheile

für $A. = \frac{a}{a+m}$ „ $B. = \frac{b}{b+m}$ „ $C. = \frac{ab}{ab+am+bm}$ „ $D. = \frac{a+b}{a+b+m}$

Der ganze Strom wird aber, nach dem Ohmschen Gesetze, durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler K für alle Versuche gleich ist und von der einem Inductionsstosse entsprechenden elektromotorischen Kraft abhängt, während der Nenner durch den Widerstand der Kette, durch welche der Strom geht, gegeben ist. Bezeichnet man den Widerstand des Inductordrahtes mit r , so ergibt sich der Widerstand der ganzen Kette

für die Beobachtung $A. = r + \frac{am}{a+m}$ „ „ „ $B. = r + \frac{bm}{b+m}$ „ „ „ $C. = r + \frac{abm}{ab+am+bm}$ „ „ „ $D. = r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}$

Man erhält hiernach folgende Gleichungen für die mit dem Galvanometer beobachteten Stromintensitäten, welche mit A, B, C, D bezeichnet werden sollen:

$$A = \frac{a}{a+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{am}{a+m}} = \frac{aK}{am + ar + mr}$$

$$B = \frac{b}{b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{bm}{b+m}} = \frac{bK}{bm + br + mr}$$

$$C = \frac{ab}{ab+am+bm} \cdot \frac{K}{r + \frac{abm}{ab+am+bm}} = \frac{abK}{ab(m+r) + (a+b)mr}$$

$$D = \frac{a+b}{a+b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}} = \frac{(a+b)K}{(a+b)(m+r) + mr}$$

Setzt man hierin Kürze halber

$$\frac{1}{mr} \cdot K = \alpha, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta$$

so ergibt sich:

$$A(\beta + \frac{1}{a})$$

und hieraus

$$\frac{1}{b} B$$

woraus zur

Copie zum

werden:

oder:

Zwischen den

Gesetzen gemäss

welche sich ergie

Gleichungen elimin

Nach der gege

Formeln zunächst

 A, B, C, D die inducie

nach gleichem Maass

Galvanometernadel fü

verschieden ist. Dies

Prüfung, um sie auc

die Dämpfung va

gationen A, B, C, D

Stromstärke proporti

umgekehrt proportion

Die Dämpfung

constanten Theile,

Dämpfer, mit welchem

 $= 1$ gesetzt werden

Schliessung des Multipl

stände der vom Multipl

Kette umgekehrt prop

ist aber:

$$A(\beta + \frac{1}{a}) = B(\beta + \frac{1}{b}) = C(\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = D(\beta + \frac{1}{a+b}) = \alpha$$

und hieraus:

$$\frac{\frac{1}{b}B - \frac{1}{a}A}{A-B} = \frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})C - \frac{1}{a}A}{A-C} = \frac{\frac{1}{a+b}D - \frac{1}{a}A}{A-D} = \beta$$

woraus zur Bestimmung des gesuchten Widerstandsverhältnisses **der** Copie zum Grundmaasse $b : a$ folgende zwei Gleichungen erhalten werden:

$$(a-b)AB - aAC + bBC = 0$$

$$(aa-bb)AB + bbAD - aaBD = 0$$

oder:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB-AC}{AB-BC}$$

$$\frac{bb}{aa} = \frac{AB-BD}{AB-AD}$$

Zwischen den 4 Beobachtungen A, B, C, D findet also, den Ohmschen Gesetzen gemäss, folgende Relation statt:

$$\frac{A^2}{B^2} = \left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2 \cdot \frac{A-D}{B-D}$$

welche sich ergibt, wenn man a und b aus den vorhergehenden Gleichungen eliminiert.

Nach der gegebenen Entwicklung gelten die hier aufgestellten Formeln zunächst nur für diejenigen Fälle, wo die Beobachtungen A, B, C, D die inducierten und durch den Multiplicator gehenden Ströme nach gleichem Maasse ausgedrückt geben, d. i. wo die Dämpfung der Galvanometernadel für die verschiedenen Beobachtungen nicht merklich verschieden ist. Diese Formeln bedürfen aber noch einer besondern Prüfung, um sie auch auf die übrigen Fälle anzuwenden, in welchen die Dämpfung variiert, weil dann nämlich die beobachteten Elongationen A, B, C, D , wie man leicht einsieht, zwar ebenfalls der Stromstärke proportional, ausserdem aber der Stärke der Dämpfung umgekehrt proportional sind.

Die Dämpfung besteht nun aus einem für alle Beobachtungen constanten Theile, welcher von dem unveränderlichen ringförmigen Dämpfer, mit welchem das Galvanometer versehen ist, herrührt und $= 1$ gesetzt werden möge, und aus einem variablen, von der Schliessung des Multiplicators abhängigen Theile, welcher dem Widerstande der vom Multiplicator ausgehenden und zu ihm zurückkehrenden Kette umgekehrt proportional ist. Der Widerstand dieser Kette ist aber:

$$\text{für } A. = m + \frac{ar}{a+r}$$

$$,, B. = m + \frac{br}{b+r}$$

$$,, C. = m + \frac{abr}{ab+ar+br}$$

$$,, D. = m + \frac{(a+b)r}{a+b+r}$$

es kann folglich der variable Theil der Dämpfung dargestellt werden, wenn man $\frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta$ setzt und γ einen constanten Factor bezeichnet,

$$\text{für } A. \text{ durch } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}{\beta + \frac{1}{a}}$$

$$,, B. \quad \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{b}}$$

$$,, C. \quad \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$,, D. \quad \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}}{\beta + \frac{1}{a+b}}$$

Für die Fälle nun, wo dieser variable Theil der Dämpfung gegen den constanten $= 1$ nicht vernachlässigt werden darf, müssen in den oben entwickelten Formeln statt A, B, C, D ihre Producte in die zugehörigen Werthe der Dämpfung gesetzt werden, d. h.

$$\text{statt } A \text{ ist zu setzen } A \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}{\beta + \frac{1}{a}} \right)$$

$$,, B \quad B \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{b}} \right)$$

$$,, C \quad C \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right)$$

$$,, D \quad D \left(1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}}{\beta + \frac{1}{a+b}} \right)$$

Durch diese Substitution erhält man aber:

$$A \left[\beta + \frac{1}{a} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \right] = B \left[\beta + \frac{1}{b} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} \right) \right] = C \left[\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \\ = D \left[\beta + \frac{1}{a+b} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b} \right) \right] = \alpha$$

und hieraus:

$$\frac{A(\beta + \frac{1}{a}) - B(\beta + \frac{1}{b})}{B(\frac{1}{r} + \frac{1}{b}) - A(\frac{1}{r} + \frac{1}{a})} = \frac{A(\beta + \frac{1}{a}) - C(\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b})}{C(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}) - A(\frac{1}{r} + \frac{1}{a})}$$

$$= \frac{A(\beta + \frac{1}{a}) - D(\beta + \frac{1}{a+b})}{D(\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}) - A(\frac{1}{r} + \frac{1}{a})} = \gamma$$

woraus

$$AB(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + AC(\beta - \frac{1}{r})\frac{1}{b} - BC(\beta - \frac{1}{r})\frac{1}{a} = 0$$

$$AB(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + AD(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a}) - BD(\beta - \frac{1}{r})(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b}) = 0$$

folgt, oder, indem der gemeinschaftliche Factor $(\beta - \frac{1}{r})$ herausfällt, die nämlichen Gleichungen wie früher erhalten werden, nämlich:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC}$$

$$\frac{bb}{aa} = \frac{AB - BD}{AB - AD}$$

Wendet man endlich die gefundenen Regeln auf die Werthe von B, C, D an, welche sich aus den oben beschriebenen Versuchen ergeben haben, nämlich:

$$A = 235,86$$

$$B = 231,94$$

$$C = 122,89$$

$$D = 424,00,$$

ergibt sich zuvörderst:

$$\frac{A^3}{B^3} = 1,05156$$

$$\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2 \cdot \frac{A-D}{B-D} = 1,05128.$$

Uebereinstimmung dieser beiden Werthe, welche nach obigen gleich sein sollten, kann als Bestätigung der Ohmschen Gesetze aus denen jene Regeln abgeleitet sind.

Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während des Zeitmaasses um das Flächenmaass zunimmt oder abnimmt.

3) Das Maass für den Widerstand.

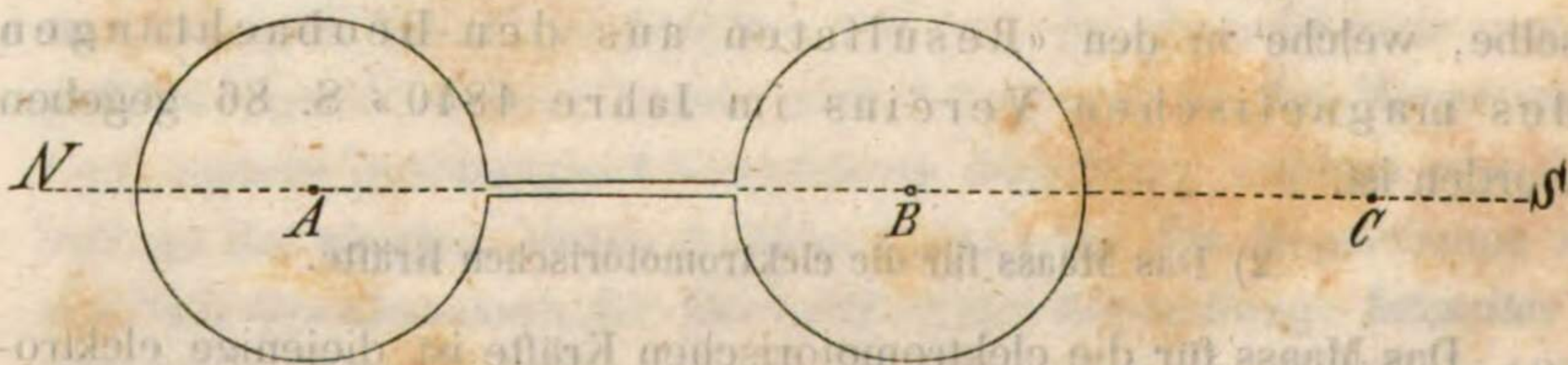
Das Maass für den Widerstand ist der Widerstand einer solchen geschlossenen Kette, in welcher durch das vorher definierte Maass der elektromotorischen Kraft das vorher definierte Maass der Stromintensität hervorgebracht wird.

Bezeichnet man das oben definierte Maass für die Stromintensitäten mit I und irgend eine hiernach gemessene Stromintensität mit iI , worin i eine reine Zahl bezeichnet, und bezeichnet man ferner das oben definierte Maass für die elektromotorischen Kräfte mit E und irgend eine hiernach gemessene elektromotorische Kraft mit eE , worin e eine reine Zahl bezeichnet; so wird wW der Widerstand einer Kette sein, auf welche die elektromotorische Kraft eE wirkt und darin einen Strom von der Intensität iI hervorbringt, wenn W das oben definierte Widerstandsmaass bezeichnet und $w = \frac{e}{i}$ eine reine Zahl ist. Der Widerstand dieser Kette ist also dem Widerstandsmaasse gleich, wenn $e = i$ gefunden wird. Man ersieht hieraus, wie ein Leiter, welcher das vorher definierte Widerstandsmaass besitzt, wirklich dargestellt werden kann.

11.

Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters.

Zur Erläuterung, wie die vorher definierten elektrodynamischen Maasse zur Ausführung der absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters in Anwendung gebracht werden können, diene das folgende Beispiel.



Die Gerade NS bezeichne die Richtung des Erdmagnetismus, dessen Stärke an den beiden Orten A und B nach dem vorher definierten Maasse $= T$ sei. Der Werth von T wird bekanntlich nach der von

in der « *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam evocata* » gegebenen Anleitung aus magnetometrischen Beobachtungen gefunden. Nun bestehe eine geschlossene Kette aus zwei kreisförmigen Mittelpunkte A und B seien; die Linie NS liege in der Ebene dieser Kreise. Es gehören aber zu dieser Kette noch ferner zwei einander liegende, von einander isolierte Drähte, welche eine feste Verbindung zwischen beiden Kreisen herstellen, und es sei jeder Kreis zwischen den beiden Punkten, wo die beiden Drähte mit ihm verbunden sind, durchschnitten, so dass alle Theile der Kette, wie die Figur zeigt, eine in sich zurücklaufende Linie bilden. Bezeichne die der Einfachheit wegen gleich angenommenen Radien beider Kreise. Projiciert man den Kreis A nach der Richtung NS auf eine gegen NS senkrechte Ebene, so ist die von der Projection begrenzte Fläche $= 0$. Die Beugsamkeit der die beiden Kreise verbindenden Drähte möge aber gestatten, den Kreis A zu drehen und gegen NS senkrecht zu stellen, wo dann die von der Projection begrenzte Fläche $= \pi r^2$ wird. Diese Drehung bringe man in einer kurzen Zeit τ auf solche Weise, dass die von der Projection begrenzte Fläche in dieser Zeit gleichförmig von 0 bis πr^2 wachse. Es ergibt sich dann aus den magnetoelektrischen Gesetzen eine elektromotorische Kraft eE , welche der Erdmagnetismus auf den kreisförmigen Leiter A während der Zeit τ ausübt, ausgedrückt durch das vorher definierte Maass E und durch die Zahl

$$e = \frac{\pi r^2}{\tau} \cdot T$$

ausgedrückt ist. Durch diese elektromotorische Kraft wird während der Zeit τ ein durch die ganze geschlossene Kette gehender Strom hervorgerufen, dessen Intensität mit iI bezeichnet werden soll. Dieser Strom geht auch durch den Kreis B und wirkt von diesem Kreise aus auf die entfernte Magnetnadel in C , deren Drehungsaxe auf NS steht und in der Ebene des Kreises B liege. Ist nun I das vorher definierte Maass für die Stromintensitäten, so ergibt sich aus den magnetoischen Gesetzen, dass das von dem durch den Kreis B gehenden Strome auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment dem Drehungsmomente gleich ist, welches ein Magnetstabe ausgeübt, wenn sein Mittelpunkt des Kreises B so aufgestellt würde, dass seine magnetische Axe auf der Kreisebene senkrecht wäre, wenn der nach vorher definierten Maasse gemessene Magnetismus M dieses Stabes

$$M = \pi r r i$$

ist. Wenn nun ferner der nach gleichem Maasse gemessene Magnetismus der Nadel $C = m$ und $BC = R$ ist, und φ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe der Nadel C mit der Richtung NS des Erdmagnetismus macht; so wird das von dem Magnetstabe M auf die Nadel m ausgeübte Drehungsmoment nach bekannten magnetischen Gesetzen durch

$$\frac{Mm}{R^3} \cos \varphi = \frac{\pi r r}{R^3} \cdot im \cdot \cos \varphi$$

ausgedrückt. Hieraus ergibt sich, wenn K das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet, die Acceleration der Drehung

$$= \frac{\pi r r}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos \varphi$$

und folglich, wenn die Nadel vorher in Ruhe und $\varphi = 0$ war, die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ am Ende der kurzen Zeit τ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi r r}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau$$

Aus dieser Geschwindigkeit findet man endlich die grösste Elongation α der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Schwingungsgesetzen durch Multiplication mit der Schwingungsdauer t und durch Division mit der Zahl π , nämlich:

$$\alpha = \frac{r r}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau t$$

Für die Schwingungsdauer t gilt bekanntlich die Gleichung

$$m T = \frac{\pi \pi K}{t t}$$

woraus

$$\alpha = \frac{\pi \pi r r}{R^3} \cdot \frac{i \tau}{t T}$$

und folglich

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi \pi r r} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

oder
Man könnte nun ferner, indem man beachtet, dass der durch den Kreis B gehende Strom auch den Kreis A durchläuft, auch die Wirkung des Kreisstroms A auf die Nadel berechnen; indessen möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die Entfernung AC so gross sei, dass diese Wirkung gegen die Wirkung des Kreisstroms B verschwinde; es wird dann die Beobachtung der wirklichen Elongationsweite der Nadel unmittelbar den Werth von α geben.

Dann ergibt sich, dass von der oben angegebenen, nach dem vorher definierten Maasse bestimmten elektromotorischen Kraft eE , für welche

$$e = \frac{\pi r r}{\tau} \cdot T$$

gefunden worden ist, in der ganzen Kette ein Strom hervorgebracht werde, dessen Intensität nach dem vorher definierten Maasse durch iI bestimmt wird, wenn

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi \pi r r} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

Nun wird endlich der Widerstand der ganzen Kette nach dem vorher definierten Maasse durch wW bestimmt, wenn

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^3 r^2}{\alpha R^3 t}$$

st. Die Ausführung der absoluten Widerstandsmessung der ganzen Kette ist hiernach auf die Messung der Grössen

$$r, R, \alpha, t$$

zurückgeführt worden, oder, mit andern Worten, der Widerstand der ganzen Kette kann hiernach in dem vorher definierten Maasse ausgedrückt werden, wenn man aus den Beobachtungen erstens die Zahl α gefunden hat, welche die Elongationsweite der Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, zweitens die Zahl $\frac{r}{R}$, welche den Halbmesser der beiden Kreise in Theilen der Entfernung BC angiebt, drittens die Geschwindigkeit $\frac{r}{t}$, mit welcher der Halbmesser jener Weite während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde. Hieraus folgt also, dass ein Maass für die Geschwindigkeit das einzige Maass ist, auf welchem die absolute Widerstandsmessung beruht.

Nach der hiermit gegebenen Übersicht aller zu einer absoluten Widerstandsbestimmung erforderlichen Beobachtungen gehen wir zur Ausführung dieser Beobachtungen selbst über.

42.

Über die Ausführung der Beobachtungen.

Die meisten Beobachtungen, welche der vorhergehenden Darstellung gemäss zur absoluten Widerstandsbestimmung der ganzen Kette gemacht werden müssen, können nun ohne Schwierigkeit mit grosser Genauigkeit wirklich ausgeführt werden. Denn die zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Nadel erforderlichen Beobachtungen gestatten Genauigkeit, die bekanntlich nichts zu wünschen übrig lässt. Eben so leicht lassen sich die Abmessungen der Kreishalbmesser und der Entfernung $BC = R$. Es bleibt daher nur die Beobachtung der Elon-

Ferner ergibt sich daraus das Widerstandsverhältniss der Copie b zum Grundmaasse a , und zwar aus den beobachteten Werthen A, B, C :

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC} = 0,984616,$$

aus den beobachteten Werthen A, B, D :

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{AB - BD}{AB - AD}} = 0,984485;$$

im Mittel also ist der Widerstand der Copie, in Theilen des Widerstandes des gegebenen Grundmaasses ausgedrückt,

$$= 0,98455.$$

Auf die nämliche Weise, wie hier das Widerstandsverhältniss der Copie zu dem Grundmaasse bestimmt worden ist, kann nun auch das Widerstandsverhältniss anderer Leiter zum Grundmaasse gefunden und dadurch können die Widerstände aller dieser Leiter nach dem gegebenen Grundmaasse gemessen werden.

Die Anordnung der Beobachtungen war in dem hier gegebenen Beispiele nach der Multiplications-Methode getroffen worden. Es ist aber schon erwähnt worden, dass diese Anordnung noch auf eine andere Weise, nämlich nach der Zurückwerfungsmethode, gemacht werden kann, und es besitzt sogar diese letztere Anordnungsweise einige Vorzüge vor der ersteren. Es verdient daher diese zweite Methode näher erörtert zu werden, was in der Beilage C. am Ende dieser Abhandlung geschehen soll, wo auch ein Messungsbeispiel nach dieser Methode beigelegt werden wird.

II.

ZURÜCKFÜHRUNG DER WIDERSTANDSMESSUNGEN AUF
ABSOLUTES MAASS.

8.

Nachdem im ersten Abschnitte gezeigt worden ist, wie der Widerstand eines Leiters mit der erforderlichen Schärfe nach einem gegebenen Grundmaasse bestimmt werden kann, soll nun im zweiten Abschnitte die Zurückführung dieser Messungen auf absolutes Maass gegeben werden.

Man könnte glauben, dass sich eine solche Zurückführung auf die einfachste Weise dadurch bewerkstelligen lasse, dass man auf die räumlichen Dimensionen (Länge und Querschnitt) der Leiter zurückgehe und sich dabei an dasjenige Metall halte, was zu den Leitern am geeignetsten ist und am häufigsten dazu gebraucht wird, an das Kupfer. In der That würde man auf diese Weise zu Widerstandsbestimmungen der Leiter gelangen, welche dem Namen nach als absolute bezeichnet werden könnten, die aber in der That dem wahren Zwecke, die Zahl der willkürlich anzunehmenden Grundmaasse zu vermindern, nicht entsprechen würden. Es würde dadurch nur an die Stelle eines Grundmaasses für absoluten Widerstand ein Grundmaass für specifischen Widerstand (nämlich der des Kupfers) gesetzt werden. Für den angeführten Zweck ist es aber gleichgültig, ob man ein Maass des absoluten Widerstandes zum Grunde legt und das Maass des specifischen Widerstandes daraus ableitet, oder ob man umgekehrt ein Maass des specifischen Widerstands zum Grunde legt und daraus das Maass des absoluten Widerstandes ableitet. Absolute Widerstandsmessungen sind daher nur dann von wesentlicher Bedeutung, wenn sie so ausgeführt werden, dass gar keine neuen, sondern nur vorhandene, zu anderen Zwecken schon gebrauchte und unentbehrliche Maasse, wie z. B. die des Raumes und der Zeit, zum Grunde liegen.

Hiernach kann nun leicht Dasjenige beurtheilt werden, was Jacobi in der oben angeführten Stelle S. 199 f. bei Gelegenheit seines Vorschlags in Betreff eines festen Widerstandsmaasses gesagt hat: es könne, um die Leitungswiderstände, welche die Physiker messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit auszudrücken, keine absolute Bestimmung stattfinden, weil es scheine, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede stattfänden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden könnten, und dass also, wenn der eine Physiker seine Widerstandsmesser und Multiplicatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezöge, die andern Physiker immer noch nicht die Ueberzeugung hätten, ob sein Kupferdraht und der ihrige einen gleichen Widerstandcoefficienten (d. i. ob das Kupfer dieser Drähte gleichen specifischen Widerstand) besitze. Man sieht, dass Jacobi hier nur eine solche absolute Bestimmung im Auge hat, bei welcher das Maass des absoluten Widerstandes aus einem für den specifischen Widerstand angenommenen Grundmaasse abgeleitet wird, die er mit Recht verwirft; die Frage aber, ob überhaupt ein neues Grundmaass nöthig sei, oder ob Widerstandsbestimmungen möglich seien, ohne irgend eines von jenen beiden Grundmaassen anzunehmen, hat Jacobi gar nicht berührt. Diese Frage ist es aber gerade, deren Beantwortung uns vorzugsweise beschäftigen wird. Wenn sich übrigens aus dieser Antwort ergeben wird, dass in der That zum Zweck der Widerstandsmessungen gar kein neues Grundmaass nöthig ist, so folgt doch daraus noch keineswegs, dass die Feststellung eines solchen Grundmaasses, wie Jacobi vorgeschlagen und wie es im ersten Theile dieser Abhandlung zur Anwendung gebracht worden ist, ganz überflüssig sei. Es wird vielmehr gezeigt werden, dass die Annahme des Jacobi'schen Vorschlags auch dann noch aus praktischen Gründen höchst wünschenswerth bleibt, weil eine absolute Widerstandsbestimmung sich direct nur in seltenen Fällen unter besonders günstigen Verhältnissen genau ausführen lässt, durch Annahme des Jacobi'schen Vorschlags aber eine Brücke gebaut wird, auf welcher man dazu gelangt, mit Hülfe einer einzigen wirklich ausgeführten absoluten Widerstandsbestimmung alle andern Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zurückzuführen. Dass nun eine absolute Widerstandsbestimmung auf ganz andere Weise möglich sei, als diejenige, von welcher Jacobi spricht, ganz unabhängig von dem

specifischen Widerstande oder von dem Widerstandscoefficienten irgend eines Körpers, wie des Kupfers, nämlich durch eine eigenthümliche Combination magnetoelektrischer und elektromagnetischer Beobachtungen, ist schon von Gauss ausgesprochen worden, bald nachdem Faraday's Entdeckung der Magnetoelektricität bekannt geworden war.

Das Wesentliche dieser Methode lässt sich auf folgende Weise kurz in Worten ausdrücken: Betrachtet man die Intensität irgend eines galvanischen Stroms, so leuchtet ein, dass dieselbe im Allgemeinen auf zwei wesentlich verschiedene Arten bestimmt werden kann: erstens aus den Ursachen, von welchen sie abhängt; zweitens aus den Wirkungen, welche sie hervorbringt. Die aus ihren Wirkungen definierte Stromintensität kann nun aber, wie sich leicht zeigen lässt, auf absolutes Maass zurückgeführt werden, und da einleuchtet, dass der Werth einer Stromintensität nach absolutem Maasse der nämliche sein müsse, es möge dieselbe aus ihren Wirkungen oder aus ihren Ursachen definiert werden, so ist das Resultat, welches auf dem letzten Wege erhalten werden muss, durch das auf dem ersten erhaltene schon im Voraus bekannt. Nun weiss man aber, dass die Stromintensität nur von zwei Ursachen abhängt, nämlich von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, und dass von diesen beiden die elektromotorische Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt werden kann. So wie nun, wenn ausser der elektromotorischen Kraft auch der Widerstand nach absolutem Maasse gegeben wäre, der absolute Werth der Stromintensität sich unmittelbar daraus ergeben würde, eben so ergiebt sich umgekehrt, da ausser der elektromotorischen Kraft auch die Stromintensität nach absolutem Maasse gegeben ist, der Werth des Widerstandes nach absolutem Maasse, und man sieht hieraus, dass Widerstandsmessungen ausgeführt werden können, ohne dass irgend ein neues willkührliches Grundmaass dazu gebraucht wird, was zu beweisen war.

Leuchtet nun auch hieraus im Allgemeinen die Möglichkeit eines absoluten Widerstandsmaasses in der angegebenen engern Bedeutung des Wortes ein, so ist es doch noch nöthig, eine genaue Definition dieses Maasses zu geben, wenn eine wirkliche Messung nach diesem Maasse ausgeführt werden soll. Eine solche Definition findet aber eine Schwierigkeit darin, dass sie andere absolute Maasse als bekannt voraussetzt, nämlich das absolute Maass für die elektromotorischen Kräfte

und das absolute Maass für die (aus ihren Wirkungen bestimmten) Stromintensitäten. Es handelt sich demnach bei der Begründung eines absoluten Widerstandsmaasses im Grunde um die Feststellung eines vollständigen Systems absoluter Maasse für die ganze Elektrodynamik. Geht man noch weiter zurück, so findet man, dass auch diese letzteren Maasse wieder andere, ausser dem Kreise der Elektrodynamik, voraussetzen, und dass also die beabsichtigte Begründung des Widerstandsmaasses eine nähere Erörterung der absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten nöthig macht, welche der Ausführung unserer Messung vorausgeschickt werden muss.

9.

Über die absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten.

Es ist bekannt, dass es sehr zur Vereinfachung physicalischer Forschungen dient, wenn man für die verschiedenen Grössenarten nicht mehr eigene, von einander unabhängige Grundmaasse einführt, als unumgänglich nöthig sind, und wenn man alle anderen Maasse aus diesen wenigen nothwendigen Grundmaassen ableitet. Aus diesem Grunde werden in der Mechanik bloss für Linien, Zeiträume und Massen Grundmaasse aufgestellt, und die Maasse aller andern in der Mechanik betrachteten Grössenarten werden aus diesen wenigen Grundmaassen abgeleitet und heissen dann absolute Maasse. Zum Beispiel werden keine Grundmaasse für Geschwindigkeit und Dichtigkeit aufgestellt, sondern es werden absolute Maasse dafür gebraucht, welche auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt werden können. Eben so werden die Maasse für die bewegenden und für die absoluten Kräfte, für die Drehungsmomente, Trägheitsmomente, Nutzeffecte u. s. w. nach bekannten Gesetzen auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt. Aus demselben Grunde wird ferner auch für den Magnetismus kein eigenes unabhängiges Grundmaass eingeführt, sondern man hält sich an das absolute Maass, welches Gauss für den Magnetismus aus den drei Grundmaassen der Mechanik in der Abhandlung: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*. Gottingae 1833. abgeleitet hat.

Das Maass für den Stabmagnetismus ist nämlich hiernach der Magnetismus eines solchen Stabs, welcher, — wenn er aus grosser Entfer-

nung R auf einen andern gleich stark magnetischen Stab wirkt, dessen magnetische Axe derjenigen Geraden parallel ist, welche die Mittelpunkte der beiden Magnete verbindet, während seine eigene magnetische Axe dagegen senkrecht ist, — ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zum absoluten Maasse des Drehungsmomentes wie $1 : R^3$ verhält.

Das Maass für die Stärke des Erdmagnetismus (für die Stärke der erdmagnetischen Kraft) an irgend einem Orte ist eben danach das nach absolutem Maasse ausgedrückte Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf einen an diesem Orte befindlichen Magnetstab ausübt, wenn letzterer das absolute Maass Magnetismus enthält und seine magnetische Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an diesem Orte einen rechten Winkel macht.

40.

Definitionen der absoluten Maasse in der Elektrodynamik.

Die absoluten Maasse der in der Elektrodynamik betrachteten Grössenarten lassen sich nun auf folgende Weise durch Zurückführung auf die magnetischen Maasse kurz und vollständig definieren.

1) Das Maass für die Stromintensitäten.

Das Maass für die Stromintensitäten ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umläuft, nach den elektromagnetischen Gesetzen die nämlichen Wirkungen in die Ferne ausübt, wie ein Magnetstab, welcher das vorher definierte Maass des Magnetismus enthält.

Diese Definition von dem Maasse für die Stromintensitäten ist dieselbe, welche in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 86 gegeben worden ist.

2) Das Maass für die elektromotorischen Kräfte.

Das Maass für die elektromotorischen Kräfte ist diejenige elektromotorische Kraft, welche von dem vorher definierten Maasse des Erdmagnetismus auf eine geschlossene Kette ausgeübt wird, wenn letztere so gedreht wird, dass die von ihrer Projection auf eine gegen die

Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während des Zeitmaasses um das Flächenmaass zunimmt oder abnimmt.

3) Das Maass für den Widerstand.

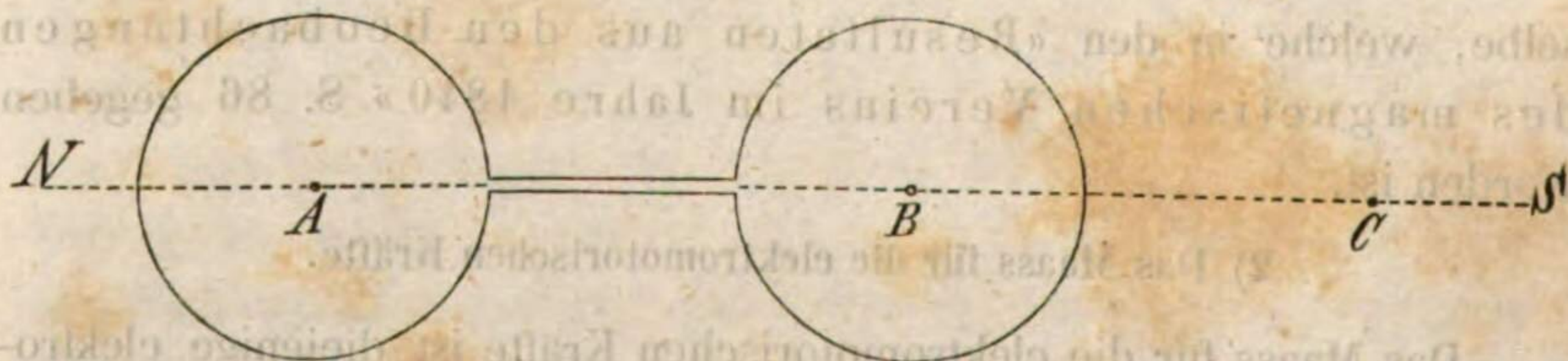
Das Maass für den Widerstand ist der Widerstand einer solchen geschlossenen Kette, in welcher durch das vorher definierte Maass der elektromotorischen Kraft das vorher definierte Maass der Stromintensität hervorgebracht wird.

Bezeichnet man das oben definierte Maass für die Stromintensitäten mit I und irgend eine hiernach gemessene Stromintensität mit iI , worin i eine reine Zahl bezeichnet, und bezeichnet man ferner das oben definierte Maass für die elektromotorischen Kräfte mit E und irgend eine hiernach gemessene elektromotorische Kraft mit eE , worin e eine reine Zahl bezeichnet; so wird wW der Widerstand einer Kette sein, auf welche die elektromotorische Kraft eE wirkt und darin einen Strom von der Intensität iI hervorbringt, wenn W das oben definierte Widerstandsmaass bezeichnet und $w = \frac{e}{i}$ eine reine Zahl ist. Der Widerstand dieser Kette ist also dem Widerstandsmaasse gleich, wenn $e = i$ gefunden wird. Man ersieht hieraus, wie ein Leiter, welcher das vorher definierte Widerstandsmaass besitzt, wirklich dargestellt werden kann.

11.

Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters.

Zur Erläuterung, wie die vorher definierten elektrodynamischen Maasse zur Ausführung der absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters in Anwendung gebracht werden können, diene das folgende Beispiel.



Die Gerade NS bezeichne die Richtung des Erdmagnetismus, dessen Stärke an den beiden Orten A und B nach dem vorher definierten Maasse $= T$ sei. Der Werth von T wird bekanntlich nach der von

Gauss in der « *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* » gegebenen Anleitung aus magnetometrischen Beobachtungen gefunden. Nun bestehe eine geschlossene Kette aus zwei Kreisen, deren Mittelpunkte A und B seien; die Linie NS liege in der Ebene dieser Kreise. Es gehören aber zu dieser Kette noch ferner zwei neben einander liegende, von einander isolierte Drähte, welche eine doppelte Verbindung zwischen beiden Kreisen herstellen, und es sei endlich jeder Kreis zwischen den beiden Punkten, wo die beiden Drähte mit ihm verbunden sind, durchschnitten, so dass alle Theile zusammen, wie die Figur zeigt, eine in sich zurücklaufende Linie bilden; r bezeichne die der Einfachheit wegen gleich angenommenen Halbmesser beider Kreise. Projiciert man den Kreis A nach der Richtung NS auf eine gegen NS senkrechte Ebene, so ist die von der Projection begrenzte Fläche $= 0$. Die Beugsamkeit der die beiden Kreise verbindenden Drähte möge aber gestatten, den Kreis A zu drehen und gegen NS senkrecht zu stellen, wo dann die von der nämlichen Projection begrenzte Fläche $= \pi r^2$ wird. Diese Drehung geschehe in einer kurzen Zeit τ auf solche Weise, dass die von der Kreisprojection begrenzte Fläche in dieser Zeit gleichförmig von 0 bis πr^2 wachse. Es ergibt sich dann aus den magnetoelektrischen Gesetzen eine elektromotorische Kraft eE , welche der Erdmagnetismus T auf den kreisförmigen Leiter A während der Zeit τ ausübt, welche durch das vorher definierte Maass E und durch die Zahl

$$e = \frac{\pi r^2}{\tau} \cdot T$$

bestimmt ist. Durch diese elektromotorische Kraft wird während der Zeit τ ein durch die ganze geschlossene Kette gehender Strom hervor gebracht, dessen Intensität mit iI bezeichnet werden soll. Dieser Strom geht auch durch den Kreis B und wirkt von diesem Kreise aus auf eine entfernte Magnetnadel in C , deren Drehungsaxe auf NS senkrecht sei und in der Ebene des Kreises B liege. Ist nun I das vorher definierte Maass für die Stromintensitäten, so ergibt sich aus den elektromagnetischen Gesetzen, dass das von dem durch den Kreis B gehenden Strome auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment dem von einem Magnetstabe ausgeübten Drehungsmomente gleich ist, welcher im Mittelpunkte des Kreises B so aufgestellt würde, dass seine magnetische Axe auf der Kreisebene senkrecht wäre, wenn der nach dem vorher definierten Maasse gemessene Magnetismus M dieses Stabes

$$M = \pi r r i$$

ist. Wenn nun ferner der nach gleichem Maasse gemessene Magnetismus der Nadel $C = m$ und $BC = R$ ist, und φ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe der Nadel C mit der Richtung NS des Erdmagnetismus macht; so wird das von dem Magnetstabe M auf die Nadel m ausgeübte Drehungsmoment nach bekannten magnetischen Gesetzen durch

$$\frac{Mm}{R^3} \cos \varphi = \frac{\pi r r i}{R^3} \cdot im \cdot \cos \varphi$$

ausgedrückt. Hieraus ergibt sich, wenn K das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet, die Acceleration der Drehung

$$= \frac{\pi r r i}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos \varphi$$

und folglich, wenn die Nadel vorher in Ruhe und $\varphi = 0$ war, die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ am Ende der kurzen Zeit τ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi r r i}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau$$

Aus dieser Geschwindigkeit findet man endlich die grösste Elongation α der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Schwingungsgesetzen durch Multiplication mit der Schwingungsdauer t und durch Division mit der Zahl π , nämlich:

$$\alpha = \frac{r r i}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau t$$

Für die Schwingungsdauer t gilt bekanntlich die Gleichung

$$m T = \frac{\pi \pi K}{t t}$$

woraus

$$\frac{m t}{K} = \frac{\pi \pi}{t T}$$

und folglich

$$\alpha = \frac{\pi \pi r r i}{R^3} \cdot \frac{i \tau}{t T}$$

oder

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi \pi r r} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

Man könnte nun ferner, indem man beachtet, dass der durch den Kreis B gehende Strom auch den Kreis A durchläuft, auch die Wirkung des Kreisstroms A auf die Nadel berechnen; indessen möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die Entfernung AC so gross sei, dass diese Wirkung gegen die Wirkung des Kreisstroms B verschwinde; es wird dann die Beobachtung der wirklichen Elongationsweite der Nadel unmittelbar den Werth von α geben.

Dann ergibt sich, dass von der oben angegebenen, nach dem vorher definierten Maasse bestimmten elektromotorischen Kraft eE , für welche

gefunden worden ist, in der ganzen Kette ein Strom hervorgerufen werde, dessen Intensität nach dem vorher definierten Maasse durch iI bestimmt wird, wenn

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi r r r} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

Nun wird endlich der Widerstand der ganzen Kette nach dem vorher definierten Maasse durch wW bestimmt, wenn

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^3 r^3}{\alpha R^3 t}$$

ist. Die Ausführung der absoluten Widerstandsmessung der ganzen Kette ist hiernach auf die Messung der Grössen

$$r, R, \alpha, t$$

zurückgeführt worden, oder, mit andern Worten, der Widerstand der ganzen Kette kann hiernach in dem vorher definierten Maasse ausgedrückt werden, wenn man aus den Beobachtungen erstens die Zahl α gefunden hat, welche die Elongationsweite der Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, zweitens die Zahl $\frac{r}{R}$, welche den Halbmesser der beiden Kreise in Theilen der Entfernung BC angiebt, drittens die Geschwindigkeit $\frac{r}{t}$, mit welcher der Halbmesser jener Kreise während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde. Hieraus folgt also, dass ein Maass für die Geschwindigkeit das einzige Grössenmaass ist, auf welchem die absolute Widerstandsmessung beruht.

Nach der hiermit gegebenen Übersicht aller zu einer absoluten Widerstandsbestimmung erforderlichen Beobachtungen gehen wir zur Ausführung dieser Beobachtungen selbst über.

12.

Über die Ausführung der Beobachtungen.

Die meisten Beobachtungen, welche der vorhergehenden Darstellung gemäss zur absoluten Widerstandsbestimmung der ganzen Kette gemacht werden müssen, können nun ohne Schwierigkeit mit grosser Schärfe wirklich ausgeführt werden. Denn die zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Nadel erforderlichen Beobachtungen gestatten eine Schärfe, die bekanntlich nichts zu wünschen übrig lässt. Eben so verhält es sich mit den Abmessungen der Kreishalbmesser und der Entfernung $BC = R$. Es bleibt daher nur die Beobachtung der Elon-

gationsweite α der schwingenden Nadel übrig. Auch diese kann bekanntlich mit den für das Magnetometer getroffenen Einrichtungen bis auf einige Bogensekunden genau bestimmt werden und würde daher gleichfalls nichts zu wünschen übrig lassen, wenn z. B. die Werthe von α nicht unter 1° gross wären. Aber diese Werthe sind, wenn genau nach diesem Schema verfahren wird, allerdings viel kleiner und würden sogar mit den besten Beobachtungsmitteln nicht wahrgenommen werden. Die Hauptaufgabe für die praktische Ausführung der Widerstandsmessung einer Kette nach absolutem Maasse besteht daher darin, solche Modificationen in der beschriebenen Einrichtung zu treffen, durch welche die zu beobachtende Elongation α möglichst vergrössert wird.

Eine solche Modification besteht erstens darin, dass man die Magnetnadel C aus der Ferne in den Mittelpunkt des Kreises B versetzt, wo die Elongation nach einem aus den Gesetzen des Elektromagnetismus genau zu bestimmenden Verhältnisse vergrössert wird. Nur muss dabei darauf geachtet werden, dass die Länge der Nadel viel kleiner sei, als der Durchmesser des Kreises, damit die eigenthümliche Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel nicht besonders in Rechnung gebracht zu werden brauche, weil die genauere Erforschung dieser Vertheilungsweise mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Eine zweite Modification, durch welche eine Vergrösserung der Elongation α erlangt werden kann, besteht in einer solchen Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden. Es muss aber dann der Einfluss aller Umwindungen einzeln in Rechnung gebracht werden, weil sie verschiedene Halbmesser haben und nicht alle in einer Ebene mit der Nadel liegen.

Mit diesen beiden wesentlichen Modificationen gelangt man zu einer solchen Vergrösserung der Elongation, dass auch diese Beobachtung mit Schärfe ausgeführt werden kann, wie die zu beschreibenden Versuche beweisen werden.

Ehe zu der Beschreibung der Versuche selbst übergegangen wird, möge noch eine Bemerkung über eine andere Modification der Einrichtung vorausgeschickt werden, zu welcher man gelangt, wenn man die für den Kreis B schon angegebene Vertauschung einer Wirkung in die Ferne mit einer Wirkung auf den Mittelpunkt auch auf den

Kreis *A* in Anwendung bringt. Hiernach würde also die elektromotorische Kraft, welche der Erdmagnetismus aus der Ferne auf den Kreis *A* ausübte, durch die elektromotorische Kraft eines im Mittelpunkte des Kreises *A* aufzustellenden Magnets ersetzt werden. Es ergibt sich sodann nach den Gesetzen der Magnetoelektricität eine Identität der Wirkung, wenn der Magnet ruhet und der Kreis vorwärts gedreht wird, oder wenn der Kreis ruhet und der Magnet rückwärts gedreht wird. Man kann daher im Mittelpunkte des ruhenden Kreises eine Magnetnadel aufhängen und schwingen lassen und durch diese schwingende Nadel eine elektromotorische Kraft auf den Kreis ausüben, und dabei können der Kreis und die Magnetnadel bei *A* ganz gleiche Stellung erhalten, wie der Kreis und die Magnetnadel bei *B*.

Bei dieser gleichen Gestaltung und gleichen Aufstellung beider Kreise und ihrer beiden Nadeln steht endlich einer völligen Vereinigung gar nichts im Wege, weil nämlich die magnetoelektrische Wirkung der Nadel auf den Kreis und die elektromagnetische Wirkung des Kreises auf die Nadel ohne gegenseitige Störung in derselben Nadel und in demselben Kreise nach dem Principe der Dämpfung coexistieren können. Man braucht dann eine einzige Nadel, welche in Schwingung gesetzt wird und dadurch auf einen in sich geschlossenen Kreis, in dessen Mittelpunkte sie sich befindet, nach magnetoelektrischen Gesetzen eine elektromotorische Kraft ausübt, welche in diesem Kreise einen galvanischen Strom hervorbringt, der auf dieselbe Nadel nach elektromagnetischen Gesetzen zurückwirkt, von welcher er erregt worden war, und der dadurch eine Dämpfung oder Abnahme der Schwingungsbogen der schwingenden Nadel hervorbringt. Nach dieser Vereinfachung genügt die Beobachtung der Schwingungsbogen, durch deren Grösse die Grösse der elektromotorischen Kraft und durch deren Abnahme die Stärke des inducierten Stroms bestimmt werden kann. Die zweite und dritte Versuchsreihe werden Beispiele geben, wie auch nach dieser Methode der Widerstand einer Kette nach absolutem Maasse gemessen werden kann.

Wir gehen nun zu der Beschreibung der nach den aus einander gesetzten Methoden ausgeführten Versuche über und werden zuerst die nach der ersten Methode gemachten Versuche zusammenstellen.

Erste Methode.

Zur Ausführung der Versuche nach der ersten Methode wurden folgende Instrumente eingerichtet, nämlich: 1) der **Erdinductor** oder ein Drahttring, in welchem durch Drehung von dem Erdmagnetismus ein galvanischer Strom erregt wurde; 2) ein **Multiplicator**, dessen Drahtenden mit denen des Erdinductors verbunden waren; 3) ein kleines **Magnetometer**, dessen Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators aufgehängt wurde. Ueber diese drei Instrumente ist Folgendes zu bemerken.

1) Der Erdinductor.

Der zum Erdinductor verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von 46,533 Gramm, wovon fast 500 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf ein Holzgestell aufgewunden, welches nahe die Gestalt eines regulären Sechsecks hatte. Alle Drahtwindungen zusammen bildeten einen Ring mit rectangulärem Querschnitt, dessen eine auf die Ringebene senkrechte Seite 64 Millimeter, die andere etwa 46 Millimeter lang war. Die Länge eines um das Holzgestell, ehe der Draht aufgewunden war, gelegten Bandes ergab den Umfang = 3067 Millimeter; die Länge eines um den aufgewundenen Draht gelegten Bandes ergab den Umfang = 3170 Millimeter. Der Draht bildete 7 Lagen über einander, jede mit 22 bis 23 Umwindungen, die 7^{te} oder oberste Lage war nicht voll und hatte bloss 10 Umwindungen, was zusammen

445 Umwindungen

gab. Die Länge der beiden überstehenden Drahtenden betrug zusammen genommen 550 Millimeter. Hieraus ergab sich, mit Berücksichtigung der geringen Abweichung der Form von einem regulären Sechseck, die Summe der Flächen, welche von den Projectionen dieser 445 Umwindungen auf die Ringebene begrenzt wurden, zu

104,924,000 Quadratmillimeter.

Nach der Aufwindung des Drahtes wurden an zwei gegenüberstehenden Ecken des Sechsecks zwei starke Holzbacken, welche den Kupfer-ring umschlossen; am Holzgestelle befestigt, jede derselben war mit

einem starken, runden, nach aussen gekehrten Zapfen versehen, um welche der Ring gedreht werden konnte, wenn er mit diesen Zapfen in die Lager eines grossen, aus Balken sehr fest zusammengefügt Holzgestelles eingelegt wurde. Die von diesen Zapfen gebildete, der Ringebene parallele Drehungsaxe war vertical. Der eine dieser beiden Zapfen war hohl und durch denselben wurden die beiden Drahtenden durchgeführt und am Ende befestigt. Diese beiden am drehbaren Zapfen befestigten Drahtenden wurden mit 2 Spiralfedern von Messing verbunden, welche sich an dem festen Holzgestelle endigten, wo die Verbindungsdrähte eingeklemmt waren, welche den Inductor mit dem Multiplicator verbanden. Auf diese Weise war jede lockere Verbindung vermieden, welche eine Unbestimmtheit des Widerstandes der Kette verursachen konnte, und es war zugleich eine Drehung des Inductors im Halbkreis, vorwärts oder rückwärts, gestattet, während die übrigen Theile der Kette unbewegt blieben. Am andern Zapfen war eine lange Kurbel für die Drehung angebracht, welche am Ende jeder Drehung durch einen festen, am Holzgestell angebrachten Zahn arretiert wurde. Die Stellung dieser Sperrzähne wurde so reguliert, dass die Drehung des Inductors genau zwei rechte Winkel betrug, und dass die verticale Ringebene am Anfang und am Ende jeder Drehung genau senkrecht gegen den magnetischen Meridian war.

2) Der Multiplicator.

Der zum Multiplicator verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von 157,430 Grammen, wovon 4540 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf eine hölzerne Rolle aufgewunden, welche äusserlich von einer Cylinderoberfläche, deren Halbmesser 303,51 Millimeter betrug, begrenzt wurde. Der darauf gewundene Draht lag zwischen zwei parallelen hölzernen Schutzwänden, welche 202,05 Millimeter von einander abstanden. Der mittlere Halbmesser einer die äusserste Lage von Drahtwindungen begrenzenden Fläche war 374,41 Millimeter, wonach der rechteckige Querschnitt des von allen Umwindungen gebildeten Ringes 202,05 Millimeter lang und 70,9 Millimeter breit war. Der Draht bildete 28 Lagen über einander, jede von 66 bis 68

Umwindungen. Die 28^{te} oder oberste Lage war nicht voll und hatte bloss 44 Umwindungen, was zusammen 1854 Umwindungen gab. An der letzten Umwindung fehlten 155 Millimeter. Die Länge der beiden überstehenden Enden betrug zusammen 1340 Millimeter.

Dieser Multiplicator wurde so aufgestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfiel.

3) Das kleine Magnetometer.

Die Nadel des kleinen Magnetometers war ein gehärteter und magnetisirter Stahlcylinder, 60 Millimeter lang und 6,2 Millimeter dick, in ihrer Mitte mit einem messingenen Bügel versehen, an dem sie aufgehängt wurde, und der einen runden Planspiegel von 30 Millimeter Durchmesser trug, dessen Normale mit der magnetischen Axe einen rechten Winkel bildete. Bei der angegebenen Länge der Nadel, welche noch nicht den 10^{ten} Theil des Durchmessers des Multiplicators betrug, kommt der Einfluss der eigenthümlichen Vertheilung des Magnetismus nicht mehr in Betracht und braucht daher nicht in Rechnung gezogen zu werden. Die Nadel war an beiden Enden durch zwei, 34 Millimeter lange Messingstifte verlängert, welche zwei Messingkugeln von 11,7 Millimeter Durchmesser trugen. Diese Gewichte dienten zur Vergrößerung des Trägheitsmomentes der Nadel, wodurch die Schwingungsdauer eine für die Beobachtung bequeme Grösse erhielt. Diese Nadel wurde an vier zu einem Faden vereinigten Coconfäden aufgehängt, welche an der inneren Wand des Multiplicators so befestigt wurden, dass die Mitte der Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators zu liegen kam. Der von dem Multiplicator umschlossene Raum, in dessen Mitte die Magnetnadel schwebte, wurde endlich durch zwei von beiden Seiten angebrachte Holzdeckel in ein geschlossenes Gehäuse verwandelt. In dem einen dieser Deckel war eine kleine Oeffnung vor dem Spiegel der Nadel, welche mit einem planparallelen Glase verschlossen wurde. In der Verticalebene der Spiegelnormale wurde in etwa 4 Meter Entfernung das Ablesungsfernrohr des Magnetometers aufgestellt und senkrecht gegen die Spiegelnormale eine Scale darauf befestigt, deren Horizontalabstand vom Spiegel 4087,5 Millimeter

betrug und deren Bild durch das auf den Spiegel gerichtete Fernrohr beobachtet werden konnte.

14.

Beobachtungen.

Mit diesen Instrumenten wurden nun folgende Beobachtungen gemacht. Es wurde der Inductor so gestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridiane zusammenfiel, und die Magnetnadel zur Ruhe gebracht. Darauf wurde der Inductor plötzlich um 90° gedreht. Dadurch wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und es wurde mit dem Fernrohr der Stand der Nadel bei ihrer grössten positiven Elongation, welche sie nach einer halben Schwingungsdauer erreichte, an der Scale beobachtet. Nach Verlauf von $1\frac{1}{2}$ Schwingungsdauer gelangte die Nadel zu ihrer grössten negativen Elongation, welche ebenfalls an der Scale beobachtet wurde. Hierauf wurde in dem Augenblicke, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel ihren ursprünglichen Ruhestand passierte, d. i. 2 Schwingungsdauern nach Beginn der Versuche, der Inductor rückwärts um 180° gedreht. Die schwingende Nadel wurde dadurch mitten in ihrer Bewegung arretiert und rückwärts geworfen, worauf nun wieder zuerst ihre grösste negative und sodann ihre grösste positive Elongation an der Scale beobachtet wurde. Nach Verlauf von 4 Schwingungsdauern, in dem Augenblicke, wo die Nadel von ihrer letzten Elongation zurückkehrend ihren ursprünglichen Ruhestand passierte, wurde der Inductor wieder um 180° vorwärts bewegt, worauf die nämlichen Elongationsbeobachtungen gemacht wurden, wie das erste Mal, und auf diese Weise wurden die Versuche fortgesetzt, bis eine hinreichende Beobachtungsreihe erhalten wurde. Die folgende Tafel umfasst 4 solche Beobachtungsreihen. Für jede Reihe sind in der ersten Columne die an der Scale beobachteten Elongationen der Reihe nach unter einander gestellt. In der zweiten Columne sind die Mittelwerthe aus je zwei auf einander folgenden positiven oder negativen Elongationen beigefügt worden. In der dritten Columne endlich sind die Unterschiede der grössten positiven und negativen Elongationen oder die Grösse der ganzen Schwingungsbogen und unter jeder Reihe deren Mittelwerth angegeben.

Erste Reihe.			Zweite Reihe.			Dritte Reihe.			Vierte Reihe.		
467,4			467,4			463,0			462,0		
540,7			540,5			536,7			534,7		
546,7	543,70		546,8	543,65		542,6	539,65		541,7	538,20	
461,4		80,40	461,3		79,65	456,6		80,40	455,3		80,00
465,8	463,60		466,7	464,00		461,9	459,25		461,4	458,20	
540,6		79,75	540,8		79,55	537,6		80,35	535,4		79,75
546,4	543,35		546,3	543,55		541,6	539,60		540,8	537,95	
462,3		79,25	461,8		79,90	458,3		79,55	456,0		79,50
465,9	464,40		465,5	463,65		461,8	460,05		460,9	458,45	
541,4		79,45	542,4		80,00	537,7		79,70	535,3		79,50
545,7	543,55		545,2	543,65		541,8	539,75		540,6	537,95	
462,3		79,75	462,8		79,70	457,9		79,95	456,0		80,05
465,3	463,80		465,4	463,95		461,7	459,80		459,8	457,90	
542,0		79,70	542,3		79,85	537,6		79,85	536,4		79,85
545,0	543,50		545,3	543,80		541,7	539,65		539,4	537,75	
462,8		79,45	462,7		80,10	458,2		79,70	456,8		79,55
465,3	464,05		464,7	463,70		461,7	459,95		459,6	458,20	
542,0		79,45	542,3		79,80	537,6		80,10	536,0		79,65
545,0	543,50		544,7	543,50		542,5	540,05		539,7	537,85	
462,9		79,65	462,8		79,75	457,3		80,05	456,5		79,70
464,8	463,85		464,7	463,75		462,7	460,00		459,8	458,15	
542,7		79,85	541,9		79,60	536,6		79,50	535,8		79,60
544,7	543,70		544,8	543,35		542,4	539,50		539,7	537,75	
463,4		79,45	462,3		79,75	457,2		79,75	456,4		79,55
465,4	464,25		464,9	463,60		462,3	459,75		460,0	458,20	
542,6		79,70	541,3		79,85				535,7		79,55
545,3	543,95		545,6	543,45					539,8	537,75	
462,8		79,75									
465,6	464,20										
Mittel 79,64			Mittel 79,79			Mittel 79,90			Mittel 79,69		

Der Mittelwerth für den ganzen Schwingungsbogen aus allen Beobachtungen ist folglich 79,755 Scalentheile, wofür die Abmessung

79,4 Millimeter

gab. Dieses Resultat ist aber noch um $\frac{1}{2}$ Millimeter zu vergrössern, wenn es von dem Einflusse unabhängig gemacht werden soll, welchen die Dauer der Drehung des Inductors darauf hatte: man erhält dann

79,9 Millimeter. *)

*) Die Drehung des Inductors liess sich bei seiner Grösse nicht so schnell bewerkstelligen, dass ihre Dauer gegen die Schwingungsdauer der Nadel zu vernachlässigen wäre. Sie wurde daher mit möglichster Gleichförmigkeit immer in 2 Secunden ausgeführt. Die Intensität des inducirten Stroms lässt sich hiernach für jeden Augenblick der Drehung bestimmen und wird durch $i \sin \frac{\pi}{2} \theta$ dargestellt, wenn i die Intensität in der Mitte der Drehung bezeichnet und die Zeit θ von Anfang der Drehung an gerechnet wird. Dieser veränderlichen, 2 Secunden lang dauernden Induction kann, mit fast gleicher Wirkung, eine gleichförmige Induction substituiert werden,

Zur Vervollständigung der Messung wurde die Schwingungsdauer der Nadel beobachtet und aus 300 Schwingungsdauern die Dauer einer Schwingung $= 10,2818$ Secunden gefunden.

Ferner wurde das Verhältniss der magnetischen Directionskraft zu der des Fadens gefunden wie $1770 : 1$.

Da endlich in dem Saale, in welchem diese Instrumente aufgestellt waren, und in den angrenzenden Zimmern andere Magnete sich befanden, welche nicht hatten entfernt werden können, so liess sich nicht annehmen, dass die Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher in dem Inductor den Strom erregte, der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher auf die Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators wirkte, ganz gleich wäre. Daher wurden beide mit einander dadurch verglichen, dass die Schwingungsdauer einer und derselben Nadel an beiden Orten unmittelbar nach einander beobachtet wurde, und es ergab sich diese Schwingungsdauer im Mittelpunkte des Dämpfers $= 2,9095$ Secunden, „ Inductors $= 2,9126$ „ „

Umgekehrt wie die Quadrate dieser Schwingungsdauern verhält sich die Stärke des Erdmagnetismus an diesen beiden Orten, d. i. wie $100000 : 99787$.

welche $\frac{4}{\pi}$ Secunden lang einen Strom von der Intensität i erzeugt. Dieser Strom beginnt $\frac{2}{\pi}$ Secunde früher auf die Nadel zu wirken, als die Nadel zum magnetischen Meridiane gelangt und dort umkehrt, und darauf verfliessen nochmals $\frac{2}{\pi}$ Secunde, ehe der Strom aufhört. Bezeichnet α die grösste Elongation der Nadel und t ihre Schwingungsdauer, so wird die Ablenkung der Nadel in dem Augenblicke, wo der Strom beginnt oder wo er aufhört, nahe durch $\frac{\alpha}{t}$ ausgedrückt und die mittlere Ablenkung für die ganze Dauer der Induction durch $\frac{\alpha}{3t}$. Die einer solchen Ablenkung entsprechende Beschleunigung der Nadel durch ihre Directionskraft ist $= \frac{\alpha}{3t} \cdot \frac{\pi\pi}{t}$, und die während der Induction dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit ist $= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi\pi\alpha}{3t^2}$. Die Hälfte davon müsste zur Geschwindigkeit $\frac{\pi}{t} \alpha$, welche der Nadel, ihrer Elongation α nach, beim Durchgang durch den Meridian zukommt, hinzugefügt werden, um diejenige Geschwindigkeit zu erhalten, welche die Nadel im Augenblicke nach der Umkehrung besitzen würde, wenn die Induction momentan geschähe. Wie sich nun die Geschwindigkeiten $\frac{\pi}{t} \alpha : \left(1 + \frac{2}{3t}\right) \frac{\pi}{t} \alpha$ verhalten, ebenso verhält sich die beobachtete Elongation der Nadel α zu derjenigen Elongation, welche bei momentaner Induction stattgefunden haben würde. Letztere ergiebt sich hiernach $= \left(1 + \frac{2}{3t}\right) \alpha$. Da nun der ganze Schwingungsbogen $2\alpha = 79,4$ Millimeter und $t = 10,2818$ war, so folgt hieraus der oben angeführte Werth $= 79,9$ Millimeter.

Dies sind alle Versuche, welche nach der ersten Methode nöthig waren, um den Widerstand der ganzen Kette, welche aus dem Drahte des Inductors, des Dämpfers und aus den beiden Verbindungsdrähten bestand, nach absolutem Maasse zu bestimmen. Ehe zur Berechnung der Grösse des Widerstands der Kette aus diesen Versuchen übergegangen wird, sollen auch die nach der zweiten Methode gemachten Versuche zusammengestellt und vorausgeschickt werden.

45.

Zweite Methode.**A.**

Die zweite Methode gewährt die Vereinfachung, dass von den bei der ersten gebrauchten Instrumenten der Erdinductor ganz entbehrlich gemacht wird. Bei den folgenden Versuchen bildete daher der Draht des oben beschriebenen Multipliers die ganze Kette, indem seine Enden unmittelbar mit einander verbunden wurden. Die Aufstellung des Multipliers, welcher dadurch in einen Dämpfer verwandelt worden war, blieb unverändert. Dagegen wurde die Nadel im Magnetometer mit einer grösseren und stärkeren vertauscht, durch deren Schwingungen eine grössere elektromotorische Kraft auf die geschlossene Kette ausgeübt werden konnte. Diese Nadel bestand aus 9 parallelipedischen Magnetstäben, jeder 90 Millimeter lang und 9 Millimeter breit und dick, welche mit parallel gerichteten Axen und durch 5 Millimeter weite Zwischenräume von einander geschieden, zu einem festen System verbunden und zur Beobachtung der Schwingungen mit einem Spiegel versehen waren.

Mit diesen vereinfachten Instrumenten wurden nun folgende Versuche gemacht. Es wurde damit begonnen, dass die Drahtenden des Dämpfers von einander getrennt wurden. Alsdann wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und nach der von Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837» gegebenen Anleitung die Schwingungsdauer der Nadel und die Abnahme ihrer Schwingungsbogen oder deren logarithmisches Decrement bestimmt. Darauf wurden die Drahtenden der Kette verbunden oder der Dämpfer geschlossen und die nämlichen Beob-

achtungen wiederholt. Sodann wurde der Dämpfer wieder geöffnet und auf diese Weise mehrmals abgewechselt. Die Resultate dieser Versuche sind in der folgenden Tafel zusammengestellt worden, wo in der ersten Columne unter *A* das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei geschlossenem Dämpfer, in der zweiten Columne das nämliche bei offenem Dämpfer, in der dritten Columne unter *t* die zugehörige Schwingungsdauer angegeben ist. Unter den Columnen sind die Mittelwerthe aus den wiederholten Bestimmungen beigelegt.

A.	B.	t.
0,028645	0,000460	9,1128
0,027955	0,000360	9,1148
0,028565	0,000380	9,1107
0,028388	0,000400	9,1128

Zur Vervollständigung der Messung wurden endlich noch folgende Versuche gemacht, um den Magnetismus der Nadel zu bestimmen und auch von dessen Vertheilung, so weit es nöthig schien, Kenntniss zu erlangen. Es wurde nämlich möglichst nahe an der Stelle, wo die schwingende Nadel sich befunden hatte, eine kleine Boussole aufgestellt und die Ablenkung v_1 derselben beobachtet, wenn jene Nadel ihr genähert wurde. Eben so wurde die Ablenkung v_2 beobachtet, nachdem die Nadel um ihren Mittelpunkt um 180° gedreht worden war. Endlich wurden die correspondierenden Ablenkungen v_3 und v_4 beobachtet, als die Nadel parallel mit sich selbst in gleiche Entfernung auf die entgegengesetzte Seite von der Boussole versetzt wurde, und daraus der Werth von

$$v = \frac{1}{4} (v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$$

berechnet. Diese Versuche wurden nun gemacht bei verschiedenen Entfernungen von der Boussole und bei verschiedener Richtung der Geraden, welche durch die Mitte der Nadel und der Boussole ging, nämlich in den Entfernungen von 400, 500 und 600 Millimetern, als jene Gerade senkrecht auf dem magnetischen Meridiane war, und in der Entfernung von 400^{mm}, als sie dem magnetischen Meridiane parallel

war. Die magnetische Axe der ablenkenden Nadel war stets senkrecht gegen den magnetischen Meridian. In der folgenden Tafel sind die Resultate dieser Versuche zusammengestellt. Nr. 1, 2, 3 beziehen sich auf die Fälle, wo die Richtung der Geraden von der Mitte der Nadel zur Mitte der Boussole auf dem magnetischen Meridiane senkrecht war, Nr. 4. auf den Fall, wo diese Gerade dem magnetischen Meridiane parallel war. In der zweiten Columnne unter R ist die Entfernung der Mittelpunkte beider Nadeln, in der dritten Columnne der für diese Entfernung gefundene Werth von v angegeben.

Nr.	R	v
1.	400 ^{mm.}	32° 37' 52" 5
2.	500	48 4 52,5
3.	600	49 37 7,5
4.	400	17 24 45,0

Hierbei ist zu bemerken, dass diese Versuchsreihe einige Zeit später gemacht wurde als die obigen Beobachtungen der im Dämpfer schwingenden Nadel, und dass daher nicht angenommen werden konnte, dass das Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dieser Zeit ganz unverändert geblieben wäre. Deshalb war schon in den Zwischenzeiten zwischen den einzelnen Sätzen der obigen Schwingungsbeobachtungen einer von diesen Ablenkungsversuchen gemacht worden, welcher dazu benutzt werden konnte, das aus der letzten vollständigen Reihe von Ablenkungsbeobachtungen sich ergebende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus auf diejenige Zeit zu reducieren, wo obige Schwingungsbeobachtungen gemacht wurden. Aus der Vergleichung der correspondierenden Ablenkungen ergab sich nämlich das Verhältniss:

$$10293 : 10000,$$

woraus hervorgeht, dass der Nadelmagnetismus in der Zwischenzeit merklich abgenommen hatte. Das Verhältniss der magnetischen Directionskraft zu der des Fadens bei den Schwingungsbeobachtungen war:

$$68 : 1.$$

Dies sind alle Versuche, welche nach der zweiten Methode nöthig waren, um den Widerstand der Kette oder des Drahtes, welcher den Dämpfer bildete, nach absolutem Maasse zu bestimmen.

B.

Aus den unter (A.) zusammengestellten Versuchen geht hervor, dass eine Nadel, deren Länge fast nur den 7^{ten} Theil des Durchmessers des Dämpfers betrug und die sehr kleine Schwingungen machte, dennoch eine elektromotorische Kraft auf den Dämpfer ausübte, welche hinreichte, einen Strom zu erregen, dessen Rückwirkung auf die Nadel nicht bloss wahrgenommen, sondern genau gemessen werden konnte. Sollen diese Versuche nun einer Berechnung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse zum Grunde gelegt werden, so entsteht einige Complication dadurch, dass auch bei den mässigen Dimensionen der Nadel im Vergleiche zum Durchmesser des Dämpfers, die Vertheilungsweise des Magnetismus in der ersteren nicht ganz ausser Acht gelassen werden darf. Diese Complication wird ganz vermieden, wenn man eine kleinere Nadel im Dämpfer aufhängt, wenn die kleinere Nadel gleich viel Magnetismus, wie die grössere, besitzt.

In dem physicalischen Institute zu Leipzig befand sich ein natürlicher Magnet von geringer Grösse und, im Verhältniss zu dieser, von grosser Stärke, welcher nebst Fassung 40 Gramme wog und 24 Millimeter lang war. Wegen dieser Kleinheit und Stärke war er zur Magnetometernadel für diese Versuche sehr geeignet, und der Durchmesser des Dämpfers hätte, ohne eine genauere Erforschung der Vertheilungsweise des Magnetismus nöthig zu machen, beträchtlich verkleinert werden können. Die zugemessene beschränkte Zeit, in welcher die grosse Drahtmasse des Dämpfers zu diesen Versuchen disponibel war, gestattete aber keine Umgestaltung des Dämpfers und es wurde daher jener natürliche Magnet als Nadel in den unveränderten Dämpfer aufgehängt und eine zweite Versuchsreihe damit ausgeführt, die hier gleichfalls zusammengestellt werden soll, weil sie einen interessanten Beweis von der Feinheit giebt, welche die Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungsbogen mit dem Dämpfer gewähren, um die Wirkungen sehr schwacher elektromotorischer Kräfte noch zu erkennen und selbst mit ziemlicher Genauigkeit zu messen. Dieser natürliche Magnet wurde zu diesem Zwecke mit Fassung versehen zur Befestigung des Spiegels und zur Aufhängung an einem Faden in der Mitte des Dämpfers. Im Uebrigen blieben die Instrumente unverändert und die Versuche wurden damit ganz auf dieselbe Weise, wie die vor-

hergehenden, ausgeführt. Die folgende Tafel giebt die Uebersicht der damit gewonnenen Resultate, nämlich unter A das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei geschlossenem Dämpfer, unter B das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei offenem Dämpfer, unter t die zugehörige Schwingungsdauer.

$A.$	$B.$	$t.$
0,00604	0,00254	3,955
0,00613	0,00267	3,954
0,00615	0,00267	3,953
0,00605	0,00266	3,949
0,006085	0,002635	3,9527

Zur Vervollständigung dieser Versuche wurde der Magnetismus des kleinen Magnets durch besondere Versuche auf ähnliche Weise bestimmt, wie in der vorhergehenden Reihe; da aber bei diesem kleinen Magnet bloss das Moment desselben zu bestimmen nöthig war, so wurden diese Versuche auf zwei verschiedene Abstände von dem Mittelpunkte der kleinen Hilfsboussole beschränkt, in der Richtung senkrecht auf den magnetischen Meridian östlich und westlich von der Boussole. Die folgende Tafel giebt eine Uebersicht der dadurch erlangten Resultate, unter R den Abstand der Mitte des natürlichen Magnets von der Mitte der Boussole, unter v die Ablenkung der Boussole auf dieselbe Weise, wie in der vorigen Reihe, berechnet.

R	v
180 ^{mm} ,08	20° 42' 0"
240,18	9 4 52

Die Resultate dieser Beobachtungen gelten für eine Temperatur von 20° R. des Kupferdrahts, welches im Mittel die Temperatur während der Beobachtungen in diesem und im vorigen Artikel gewesen ist.

Durch diese Versuche sind die Data zur Bestimmung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse vollständig gegeben.

16.

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den vorhergehenden Beobachtungen.

Wenn die Verhältnisse, unter welchen die vorhergehenden Beobachtungen ausgeführt worden sind, denjenigen Verhältnissen genau entsprechen, welche in dem Art. 11 gegebenen Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters angenommen worden waren, so würden die Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den mitgetheilten Beobachtungs-Resultaten in der am Schlusse jenes Schema's gefundenen Formel

$$w = \frac{\pi^3 r^2}{\alpha R^3 t}$$

enthalten sein; denn es würde alsdann der Werth der Zahl α , welche die Elongationsweite der von der Ruhe ab in Schwingung gesetzten Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, ferner der Werth der Zahl $\frac{r}{R}$, welche das Verhältniss der Halbmesser der kreisförmigen Leiter A und B zu der Entfernung BC angiebt, und endlich die Geschwindigkeit $\frac{r}{t}$, mit welcher der Halbmesser der kreisförmigen Leiter während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde, unmittelbar durch die Beobachtungs-Resultate gegeben sein. Weil nun aber die vorhergehenden Beobachtungen, nach der gegebenen Beschreibung, nicht genau unter den im erwähnten Schema angenommenen Verhältnissen ausgeführt worden sind, so bedürfen jene einfachen Regeln einiger Abänderungen, um Anwendung auf die vorliegenden Beobachtungen zu finden.

Einige dieser Abänderungen ergeben sich leicht, wenn man in der für die Gleichung $w = \frac{\pi^3 r^2}{\alpha R^3 t}$ gegebenen Ableitung die Halbmesser der beiden kreisförmigen Leiter ungleich annimmt und sie durch r' und r'' unterscheidet, wenn man ferner die Zahl ihrer Umwindungen m und n in Rechnung bringt, wenn man ausserdem die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel aufgehangen wurde, berücksichtigt, aus welcher sich eine Directionskraft für die Nadel ergiebt, die sich zu ihrer magnetischen Directionskraft verhält wie $\theta : 1$, und wenn man endlich die ungleiche Stärke des Erdmagnetismus an den beiden Orten A und B beachtet, deren Verhältniss durch $\frac{T'}{T''}$ dargestellt werde. Man findet dann, dass in obiger Formel das Product $r' r''$ für das Quadrat rr zu setzen und der ganze Werth für w noch mit $\frac{mn}{(1+\theta)} \cdot \frac{T'}{T''}$ zu multiplicieren ist, folglich

$$w = \frac{mn}{(1+\theta)} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{\pi^3 r' r'' r' r''}{\alpha R^3 t}.$$

Ausserdem kommen nun für die nach der ersten Methode ausgeführten Beobachtungen noch folgende wesentliche Modificationen in Betracht, nämlich erstens, dass die Nadel aus der Entfernung $BC = R$ in den Mittelpunkt des Kreises B selbst versetzt wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite in dem Verhältniss von

$$r'^3 : 2R^3$$

vergrössert wird. Hierbei lässt sich zugleich der Umstand mit berücksichtigen, dass der Kreis A statt um einen Quadranten jedes Mal um zwei Quadranten gedreht wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite ebenfalls vergrössert wurde und zwar in dem Verhältniss von

$$1 : 2.$$

Bezeichnet also α gegenwärtig diese vergrösserte Elongationsweite, so ist demgemäss

$$w = \frac{mn}{1 + \theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^3 r' r'}{a r'' t}$$

zu setzen. Zweitens kommt die Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden, in Betracht. Für den Ring A genügt es, mit Rücksicht darauf, dass er keine genaue Kreisform hatte, statt $m\pi r' r'$ die Summe der Flächen zu setzen, welche von den Projectionen aller seiner Umwindungen auf die Ringebene begrenzt werden, folglich, wenn diese Summe mit S bezeichnet wird,

$$w = \frac{n}{1 + \theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi S}{a r'' t}$$

Für den Ring B dagegen ist der äussere Halbmesser a'' , der innere Halbmesser a' , die Höhe des Ringes $2b'$ und ausserdem in Beziehung auf die Vertheilung des Magnetismus M der Nadel, wenn

$$M = 2e'\mu$$

gesetzt wird, wo $\pm \mu$ die Menge des nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums bezeichnet, welche dem bekannten Gaussischen Theoreme von der idealen Vertheilung des Magnetismus gemäss an der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht werden kann, die Länge e' in Rechnung zu bringen, was dadurch geschieht, dass statt $\frac{1}{r'}$, folgender Ausdruck gesetzt wird:

$$\frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a'' a'' + b' b')}}{a' + \sqrt{(a' a' + b' b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a'' a'' + b' b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a' a' + b' b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e' e'}{b' b'} \right\}.$$

Die hier angeführten Abänderungen der Art. 14 gefundenen Formel, welche nothwendig sind, wenn der Widerstand der Kette aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen berechnet werden soll, sind so zahlreich, dass ich es vorziehe, statt auf eine nähere Erörterung und Begründung derselben einzugehen, die beiden Gleichungen, welche im folgenden Art. 17 zur Berechnung des Widerstands aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen gebraucht werden, nämlich:

$$w = \frac{n}{1+\theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{ar''t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{e'e'}{b'b'} \right\}$$

mittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abzuleiten. Man findet diese Ableitung in Beilage D. am Ende der Abhandlung.

Ferner werden im 18. Artikel zur Berechnung des Widerstands den Art. 15 beschriebenen Versuchen folgende Gleichungen gegeben:

$$w = \frac{n\pi\pi}{1+\theta} \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \tan v_0 \cdot \frac{r''}{t}$$

$$\frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{e'e'}{b'b'} \right\},$$

λ den natürlichen Logarithmus des beobachteten Verhältnisses auf einander folgender Schwingungsbogen der Magnetometer- in Folge der Dämpfung bei geschlossener Kette bezeichnet und statt $\frac{2M}{T''r''^3}$ geschrieben worden ist. Auch diese letzteren Gleichungen sind in der Beilage D. unmittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abgeleitet worden.

Darnach können wir nun zur Berechnung des Widerstands selbst der Art. 14 und 15 beschriebenen Versuchen übergehen.

17.

Berechnung des Widerstands aus der ersten Versuchsreihe.

In der ersten Versuchsreihe Art. 14, welche nach der ersten Methode war, bestand die Kette aus dem Drahte des Inductors und

des Multiplicators und aus den beiden Verbindungsdrähten, und der zu berechnende Widerstand ist die Summe der Widerstände dieser vier Drähte.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Art. 14 beschriebenen Versuche waren erstens die Grösse des mit dem Magnetometer gemessenen Schwingungsbogens, nämlich:

$$79,9 \text{ Millimeter}$$

für einen Halbmesser von 8175 Millimeter Länge (= dem doppelten Horizontalabstande des Spiegels von der Scale). Hieraus ergibt sich:

$$\alpha = \frac{79,9}{8175}.$$

Siehe darüber Beilage C., wo die hier gebrauchte Zurückwerfungsmethode näher erörtert ist.

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t = 10,2818 \text{ Secunden.}$$

Drittens der von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührende Theil der Directionskraft der Nadel, in Theilen ihrer magnetischen Directionskraft ausgedrückt,

$$\theta = \frac{4}{4770}.$$

Viertens das Verhältniss der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus am Orte des Inductors T' zu der am Orte des Multiplicators T''

$$\frac{T'}{T''} = 0,99787.$$

Zu diesen unmittelbaren Ergebnissen der Beobachtungen sind ferner die Resultate der Abmessungen des Inductors und Multiplicators hinzuzufügen. Für den Inductor genügt das Resultat, dass die Summe der Flächen, welche von den Projectionen seiner 145 Umwindungen auf die Ringebeine begrenzt wurden,

$$S = 104924000 \text{ Quadratmillimeter}$$

betrug.

Für den Multiplicator müssen folgende Resultate seiner Abmessung beigelegt werden:

$$\text{innerer Halbmesser } a' = 303,51 \text{ Millimeter,}$$

$$\text{äusserer Halbmesser } a'' = 374,44 \text{ „}$$

$$\text{Breite } 2b' = 202,05 \text{ „}$$

$$\text{Zahl der Umwindungen } n = 1854.$$

Aus diesen Werthen von a' , a'' , b' ergibt sich

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''a'' + b'b'}}{a' + \sqrt{a'a' + b'b'}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e'e'}{b'b'} \right\}$$

$$\frac{1}{r''} = 0,0028352 + 0,000000015875 \cdot e'e'$$

wo bei der Kleinheit der Nadel für e' einen approximativen Werth, von etwa 20 Millimetern, anzunehmen genügt, also $\frac{1}{r''} = 0,00284155$. Hieraus ergibt sich dann

$$w = \frac{n}{1 + \theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{ar''t}$$

$$= \frac{4770}{4774} \cdot 1854 \cdot 0,99787 \cdot \frac{4\pi\pi \cdot 404924000}{79,9 \cdot 10,2818} \cdot 8175 \cdot 0,00284155$$

$$w = 2166 \cdot 10^8.$$

ch das definierte Widerstandsmaass W und durch diese Zahl w ist der Widerstand der Kette, welche aus dem Inductor- und dem Multiplicatordrahte nebst den beiden Verbindungsdrähten bestand, vollständig bestimmt, wobei nur zu bemerken ist, dass dieser absoluten Maassbestimmung das Millimeter als Raummaass und die Secunde als Zeitmaass Grunde liegt, was durch folgende Bezeichnung ausgedrückt wird:

$$2166 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Es sich ein anderes Raummaass zum Millimeter, wie $1 : r$, ein Zeitmaass zur Secunde, wie $1 : t$, so ist derselbe Widerstand, diese neuen Maasse zum Grunde gelegt werden:

$$2166 \cdot 10^8 \cdot \frac{r}{t}$$

Wenn die Meile als Raummaass zum Grunde gelegt wird, die Millimeter verhält, wie $1 : 0,000000135$:

$$29241 \frac{\text{Meile}}{\text{Secunde}}.$$

18.

Bestimmung des Widerstands aus der zweiten Versuchsreihe.

In der zweiten Versuchsreihe, welche nach der zweiten Methode bestimmt wurde, bestand die Kette bloss aus dem Drahte des Dämpfers, welcher in der vorhergehenden Versuchsreihe als Multiplicator bildete.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren:

Erstens die Grösse des logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbogen, welches nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theiles, nach gemeinen Logarithmen,

$$= 0,027988$$

gefunden worden ist; folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0,064445.$$

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t' = 9,1128$$

wobei noch zu bemerken war, dass die magnetische Directionskraft ungefähr um ihren 68^{ten} Theil durch die Elasticität des Fadens vermehrt war, also

$$\theta = \frac{1}{68}.$$

Drittens die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältniss zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel enthaltenen Ergebnissen der Ablenkungsversuche zu entnehmen:

Nr.	R.	v.
1.	400 ^{mm}	32" 37' 52" 5
2.	500	18 4 52, 5
3.	600	10 37 7, 5
4.	400	17 24 45

Die drei ersten Nummern beziehen sich auf die Versuche, bei welchen der Mittelpunkt der Magnetometernadel und ihre magnetische Axe mit demjenigen Perpendikel auf den magnetischen Meridian zusammenfiel, welches durch den Mittelpunkt der Hilfsboussole gelegt wurde; die vierte Nummer auf einen Versuch, wobei die Magnetometernadel zwar ebenfalls mit ihrer Axe senkrecht gegen den magnetischen Meridian lag, aber ihr Mittelpunkt in der durch den Mittelpunkt der Hilfsboussole dem magnetischen Meridiane parallel gelegten Geraden sich befand. Auch war ermittelt worden, dass das hieraus hervorgehende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dem Verhältniss

$$40000 : 40293$$

vergrössert werden muss, wenn es für die Zeit gelten soll, wo die Abnahme der Schwingungsbogen und die Schwingungsdauer der Magnetometernadel beobachtet worden waren.

Die Ableitung der Werthe von e' und v_0 in den zur Berechnung des Widerstands aufgestellten Formeln:

$$w = \frac{n\pi\pi}{1+\theta} \tan v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e'e'}{b'b'} \right\}$$

aus den eben angeführten Datis ist nun folgende. Man denkt sich die nach der S. 238 schon erwähnten idealen Vertheilungsweise an der Oberfläche der Nadel verbreiteten magnetischen Fluida jedes in seinem Mittelpunkt (Schwerpunkte) concentrirt, d. i. in zwei Punkten, welche in der Entfernung e' von der Mitte der Nadel in einer mit der Richtung der magnetischen Axe parallelen Linie liegen und deren Abstand $= 2e'$ ist. Die Lage des Mittelpunkts der Nadel und ihrer magnetischen Axe gegen den Mittelpunkt der abgelenkten Boussole und gegen den magnetischen Meridian ist in obiger Tafel für jeden Versuch genau bestimmt. Hat nun f' für die Boussole gleiche Bedeutung wie e' für die Magnetometernadel, so leuchtet ein, dass für jede gegebene Ablenkung der Boussole v die Lage der 4 Punkte, in denen die magnetischen Fluida beider Nadeln concentrirt gedacht werden, gegen einander und gegen den magnetischen Meridian durch e' und f' vollständig bestimmt werden, und dass sich dann, mit Hülfe des Gesetzes, nach welchem zwei Elemente des magnetischen Fluidums auf einander wirken, aus dem Verhältnisse des Magnetismus der Magnetometernadel M zum Erdmagnetismus T , das Verhältniss des Drehungsmoments, welches die Magnetometernadel, zu dem, welches der Erdmagnetismus auf die Boussole ausübt, bestimmen lasse. Diejenige Ablenkung v , für welche diese beiden Drehungsmomente sich entgegengesetzt gleich ergeben, ist die beobachtete, die dadurch in Abhängigkeit von e' , f' und $\frac{M}{T}$ kommt. Die Gleichung, welche die Abhängigkeit dieser Grössen ausdrückt, ergiebt sich daraus für den Fall, wo die Gerade R , welche die Mittelpunkte beider Nadeln verbindet, auf den magnetischen Meridian senkrecht ist:

$$\frac{T}{M} \tan v = \frac{2}{R^3} + \frac{4e'e' - 6(1 - 5 \sin^2 v) f'f'}{R^5} + \dots$$

für den Fall, wo R dem magnetischen Meridiane parallel ist,

$$\frac{T}{M} \tan v = \frac{1}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{e'e' - (4 - 15 \sin^2 v) f'f'}{R^5} + \dots$$

Die Annahme von der Concentration der magnetischen Fluida ist nun aber nur dann zulässig, wenn diejenigen Glieder, welche mit R^7 oder mit höheren Potenzen dividirt sind, vernachlässigt werden dürfen. Da nun für jeden Versuch in obiger Tafel die Werthe von R und v gegeben sind, so giebt jeder Versuch eine Gleichung zwischen e' , f' , $\frac{M}{T}$, und folglich geben die 4 in obiger Tafel enthaltenen Versuche 4 Gleichungen zwischen diesen 3 Grössen, von denen drei zur Bestimmung dieser Grössen dienen und die vierte zur Controle, dass die Werthe von R wirklich so gross sind, dass die Glieder der höheren Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Die Werthe obiger 3 Grössen, welche mit den Beobachtungen am besten harmonieren, sind:

$$e' = 33,745$$

$$f' = 14,856$$

$$\frac{M}{T} = 20143000.$$

Der letztere Werth von $\frac{M}{T}$ gilt für die Zeit, wo die Ablenkungsversuche gemacht wurden, und muss nach S. 242 mit 1,0293 multiplicirt werden, wenn er für die Zeit gelten soll, wo die Schwingungsdauer und die Abnahme der Schwingungsbogen beobachtet worden sind; für letztere Zeit ergibt sich also

$$\frac{2M}{T} = 41466000$$

Substituiert man ferner den gefundenen Werth von e' in der Gleichung

$$\frac{1}{r''} = 0,0028352 + 0,000000015875 e' e',$$

welche auch für die zweite Versuchsreihe gilt, weil die Abmessungen des Dämpfers hier die nämlichen sind, wie die Abmessungen des Multiplators in der ersten Versuchsreihe, so erhält man

$$\frac{1}{r''} = 0,0028532$$

oder $r'' = 350,48$

und mit diesem Werthe

$$\frac{2M}{Tr''^2} = \tan v_0 = 0,96314.$$

Ausserdem ist, wie in der ersten Versuchsreihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergibt sich dann

$$w = \frac{n\pi\pi}{1+\theta} \tan v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t} \\ = \frac{68}{69} \cdot 1854^2 \pi\pi \cdot 0,96314 \cdot \frac{\pi\pi + 0,064445^2}{0,064445} \cdot \frac{350,48}{9,1128}$$

oder

$$w = 1898 \cdot 10^8.$$

Durch das definierte Widerstandsmaass W und durch diese Zahl w ist also der Widerstand der Kette, welche bloss aus dem Dämpferdraht bestand, vollständig bestimmt.

19.

Berechnung des Widerstands aus der dritten Versuchsreihe.

Auch bei der dritten Versuchsreihe bestand die Kette, deren Widerstand bestimmt werden sollte, bloss aus dem Drahte des Dämpfers, und die Versuche waren nach der zweiten Methode ausgeführt worden. Der wesentliche Unterschied von der zweiten Versuchsreihe bestand daher bloss darin, dass der zur Magnetometernadel gebrauchte natürliche Magnet viel kleinere Dimensionen hatte, wodurch einerseits zwar die Rechnung vereinfacht wurde, weil bei so kleinen Dimensionen, im Vergleich zum Durchmesser des Dämpfers, die Art der Vertheilung des freien Magnetismus nicht in Betracht kommt; andererseits verlor aber dadurch die Messung an Präcision, weil der Magnetismus, so stark er auch im Verhältniss zur Grösse des Magnets war, doch fast nur den 19^{ten} Theil von dem Magnetismus der grösseren Nadel betrug, wodurch die Dämpfung so geschwächt wurde, dass die Beobachtungen keine so feine Bestimmung des logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbogen gestatteten.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren: Erstens die Grösse des logarithmischen Decrements für die Abnahme der Schwingungsbogen, welches, nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theils, nach gemeinen Logarithmen

$$= 0,00345$$

gefunden worden ist, folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0,007944.$$

Zweitens, die Schwingungsdauer der Nadel

$$t' = 3,9527$$

Die Elasticität des Aufhängefadens konnte vernachlässigt werden, da sie die Directionskraft noch nicht um $\frac{1}{2000}$ vergrösserte.

Drittens, die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältnisse zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel zusammengestellten Ablenkungsversuchen zu entnehmen.

$R.$	$v.$
180, ^{mm} 08	20° 42' 0
240, 18	9 4 52

Die Linie R , welche die Mittelpunkte der ablenkenden und abgelenkten Nadel verband, war dabei senkrecht auf den magnetischen Meridian.

Hieraus folgt nach der in der „*Intensitas vis magneticae terrestris etc.*“ von Gauss gegebenen Regel:

$$\text{tang } 20^\circ 42' = \frac{2M}{T} \cdot 180,08^{-3} + a \cdot 180,08^{-5}$$

$$\text{tang } 9^\circ 4' 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240,18^{-3} + a \cdot 240,18^{-5}$$

also $\frac{2M}{T} = 2224660.$

Es ist jedoch hierbei zu bemerken, dass bei dem geringen Grade von Genauigkeit, welchen diese mit so kleinen Magneten gemachten Ablenkungsversuche besitzen, die Elimination des zweiten, von der 5^{ten} Potenz der Entfernung abhängigen Gliedes sehr unsicher ist, so dass ein ebenso genaues oder vielleicht noch genaueres Resultat gewonnen wird, wenn man dieses zweite Glied gar nicht berücksichtigt. Alsdann findet man

$$\text{tang } 20^\circ 42' = \frac{2M}{T} \cdot 180,08^{-3}$$

$$\text{tang } 9^\circ 4' 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240,18^{-3}$$

und hieraus die beiden Werthe für $\frac{2M}{T}$:

$$2206600$$

$$2214500$$

oder den Mittelwerth

$$2210550.$$

Bei dem Zweifel darüber, ob der ersten oder der zweiten Berechnung im vorliegenden Falle der Vorzug gebühre, und da die auf beide Weise erhaltenen Resultate ohnedem wenig verschieden sind, so soll aus den Resultaten beider Berechnungen das Mittel genommen werden, nämlich:

$$\frac{2M}{T} = 2217600.$$

Weil nun ausserdem für den Dämpfer wieder dieselben Abmessungen wie in der vorhergehenden Versuchsreihe gelten, dabei aber das von e' abhängige Glied im Werthe von $\frac{1}{r'}$ wegen der Kleinheit der Nadel

unmerklich ist, so ergibt sich

$$\frac{4}{r''} = 0,0028352$$

$$r'' = 352,71$$

folglich

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \tan v_0 = 0,05054.$$

Ausserdem ist, wie in der vorhergehenden Reihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergibt sich dann, wenn θ seiner Kleinheit wegen vernachlässigt wird,

$$w = nn\pi\pi \cdot \tan v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{l}$$

$$= 1854^2 \cdot \pi\pi \cdot 0,05054 \cdot \frac{\pi\pi + 0,007944^2}{0,007944} \cdot \frac{352,71}{3,9527}$$

oder

$$w = 4900 \cdot 40^8.$$

Der Unterschied dieses Werthes von dem aus der zweiten Versuchsreihe abgeleiteten ist kleiner, als der, welchen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler der letzten Reihe verursachen können.

20.

Vergleichung des Widerstands der Kette in der ersten Versuchsreihe mit dem Widerstande der Kette in der zweiten und dritten Reihe.

Es sind in obigen Versuchsreihen die Widerstände zweier Ketten nach absolutem Maasse gemessen worden, von denen die erstere zusammengesetzt war 1) aus einem Drahte *A*, welcher zum Multiplicator diente, 2) aus einem Drahte *B*, welcher zum Erdinductor diente, 3) aus zwei kurzen, dicken Verbindungsdrähten *C*. Die letztere Kette bestand dagegen bloss aus dem Drahte *A*, welcher zum Dämpfer gebraucht wurde. Die Vergleichung des Widerstands beider Ketten beruht hauptsächlich auf der Vergleichung des Widerstands *A* mit dem Widerstande *B*, da der Widerstand *C* so gering ist, dass sein Einfluss nach Proportion seiner Länge und seines Querschnittes leicht als Correction in Rechnung gebracht werden konnte.

Da die unmittelbare Vergleichung der Widerstände *A* und *B* bei ihrer grossen Verschiedenheit zu einem weniger sicheren Resultate geführt haben würde, wurden 3 Hülfsdrähte *a*, *b*, *c* zugezogen, durch

welche es möglich wurde, das Verhältniss von $A : B$ bloss auf solche Messungen zu gründen, durch welche unmittelbar nur einander nahe gleiche Widerstände verglichen wurden.

Diese Widerstandsvergleiche wurden sämmtlich nach der in der Beilage C beschriebenen und durch ein Beispiel erläuterten Methode ausgeführt, und es genügt daher, in der folgenden Tafel die Resultate zusammenzustellen, ohne in das Detail der Beobachtungen einzugehen. In der ersten Columne sind die nach der angegebenen Methode gemachten Widerstandsvergleiche durch Nummern unterschieden. Die zweite Columne unter X gibt die Bezeichnung des gesuchten Widerstandsverhältnisses, die dritte Columne unter q den gefundenen Zahlenwerth. In den beiden letzten Columnen sind endlich die Logarithmen von q und $q + 1$ beigefügt worden.

Nr.	X .	q	$\text{Log } q$	$\text{Log } (q + 1)$
1.	$\frac{B}{c}$	1,04354	0,01851	0,31038
2.	$\frac{b}{B + c}$	1,03498		0,30856
3.	$\frac{a}{B + b + c}$	1,00752		0,30266
4.	$\frac{A}{B + a + b + c}$	0,91529	9,96156	
	$\frac{A}{B}$	7,3224	9,94305	0,92160

Nun ist

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log\left(\frac{A}{B + a + b + c}\right) - \log\frac{B}{c} + \log\left(\frac{B}{c} + 1\right)\left(\frac{b}{B + c} + 1\right)\left(\frac{a}{B + b + c} + 1\right)$$

das heisst, der Unterschied der beiden Logarithmen in der vierten Columne (welcher darunter angegeben ist) ist der Summe der drei Logarithmen in der letzten Columne (die gleichfalls darunter angegeben ist) hinzuzufügen, um den Logarithmus des gesuchten Verhältnisses $\frac{A}{B}$ zu erhalten, welches hiernach berechnet unter der dritten Columne bemerkt ist.

Für C reicht es hin, zu bemerken, dass der Querschnitt 3 Mal grösser, die Länge 30 Mal kleiner war, als bei B ; folglich, da beide Drähte von Kupfer waren, das Widerstandsverhältniss

$$\frac{B}{c} = 90$$

woraus endlich zur Vergleichung des Widerstandes der in der ersten Versuchsreihe gebrauchten Kette $A + B + C$ mit dem Widerstande der Kette A in den beiden andern Versuchsreihen folgt:

$$\frac{A + B + C}{A} = 1 + \frac{1 + 90}{7,3224 \cdot 90} = 1,138.$$

Nun ist $A + B + C$ aus der ersten Versuchsreihe nach absolutem Maasse bestimmt worden:

$$A + B + C = 2166 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Dividirt man diesen Werth mit obigen Quotienten, so erhält man den Werth von A aus der ersten Versuchsreihe abgeleitet:

$$A = 1903 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

21.

Uebersicht der verschiedenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Multiplicator- oder Dämpferdrahtes A .

I. Aus der ersten Versuchsreihe:

$$A = 1903 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

II. Aus der zweiten Versuchsreihe:

$$A = 1898 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

III. Aus der dritten Versuchsreihe:

$$A = 1900 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Von diesen drei Maassbestimmungen für denselben Widerstand ist der dritten, wie schon bemerkt worden ist, ein geringeres Gewicht beizulegen, als den beiden ersten. Da sie aber mit den beiden andern sehr nahe übereinstimmt, so ist kein Grund, sie auszuschliessen, und es ergiebt sich aus allen folgender Mittelwerth:

$$A = 19003 \cdot 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Die Uebereinstimmung, welche sich hiernach zwischen den beiden nach ganz verschiedenen Methoden erhaltenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Drahtes A ergiebt, nämlich zwischen der aus der ersten und der aus den beiden letzten Versuchsreihen, hat darum noch besonderes Interesse, weil sie beweist, dass die 1854 Umwindungen, welche dieser Draht im Multiplicator oder Dämpfer bildete, durch die Wolle, womit sie umspinnen waren, hinreichend isolirt wurden. Denn

hätte durch die Wolle hindurch eine Leitung von einer Umwindung zur andern stattgefunden, so würde dadurch in der ersten Versuchsreihe die Wirkung des Multipliers auf die Magnetometernadel geschwächt worden sein und die Rechnung würde einen zu grossen Widerstand gegeben haben, wie wenn der durch den ganzen Draht gehende Strom durch einen grösseren Widerstand geschwächt worden wäre. Auf das aus der zweiten Versuchsreihe berechnete Resultat würde dagegen die Leitung durch die Wolle hindurch von einer Windung zur andern gar keinen Einfluss gehabt haben; denn es ist bekannt, dass die Dämpfungskraft eines Dämpfers dadurch nicht geändert wird, dass seine Drahtwindungen in leitende Verbindung mit einander gesetzt werden. Wenigstens kann dadurch auf keine Weise die Dämpfungskraft vermindert werden; eine Vergrösserung derselben würde aber, wenn sie irgend merklich gewesen wäre, bewirkt haben, dass die Rechnung den Widerstand zu klein ergeben hätte.

22.

Etalons zu Widerstandsmessungen nach absolutem Maasse.

Hätte der Draht *A*, dessen Widerstand durch obige Maassbestimmungen nach absolutem Maasse bekannt war, als Widerstands-Etalon aufbewahrt werden können; so würde er selbst dazu haben dienen können, alle Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zu reducieren, ohne dass eine Wiederholung der Originalmessung nöthig gewesen wäre, so lange man auf die Unveränderlichkeit des Etalons bauen dürfte. Jener Draht war aber nicht zu diesem Zwecke bestimmt, und es war seine Benutzung zu der vorliegenden Untersuchung nur für kurze Zeit gestattet. Sollte daher der Nutzen, welchen die gewonnenen Resultate auf die Dauer für künftige Maassbestimmungen des Widerstands haben konnten, nicht verloren gehen, so mussten Copien vom Drahte *A* gemacht werden, deren gleicher Widerstand verbürgt war, oder Etalons, deren Widerstand mit dem Widerstande *A* genau verglichen war. Es können nun zunächst zu solchen Etalons die oben angeführten drei Kupferdrähte *a*, *b*, *c* dienen, welche als Hilfsdrähte zur Vergleichung der Widerstände *A* und *B* gebraucht worden sind, und deren Widerstandsverhältniss zu *A* aus den obigen Beobachtungen abgeleitet werden kann. Denn nach den obigen Beobachtungen war

$$\log \frac{B}{c} = 0,01851$$

$$\log \frac{b}{B+c} = 0,01493$$

$$\log \frac{a}{B+b+c} = 0,00325.$$

Fügt man nach Obigem noch hinzu:

$$\log \frac{A}{B} = 0,86465$$

$$\log A = 11,27882$$

so ergeben sich hieraus die Widerstände der drei Kupferdrähte a , b , c nach absolutem Maasse, nämlich:

$$a = 10420 \cdot 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$

$$b = 5260 \cdot 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$

$$c = 2487 \cdot 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde.}}$$

Diese so bestimmten drei Widerstands-Etalons sind mit der angegebenen Bezeichnung und dem beigefügten Widerstandswerthe in der Instrumentensammlung des physikalischen Instituts der Universität Leipzig niedergelegt worden.

Da nun aber mit dem von Jacobi aufgestellten Widerstands-Etalon schon viele Widerstandsmessungen gemacht und Copien desselben verbreitet worden sind, so erschien es für praktische Anwendungen am bequemsten, den Werth dieses Etalons nach absolutem Maasse zu bestimmen, was sich leicht durch eine Vergleichung des Widerstands dieses Etalons mit dem Widerstande des oben mit c bezeichneten Kupferdrahtes erreichen liess. Auch diese Vergleichung wurde nicht unmittelbar ausgeführt, sondern durch einen vierten Kupferdraht d vermittelt.

Es ist S. 214 der Widerstand einer Copie des Jacobi'schen Etalons J mit dem Widerstande des Originals verglichen worden. Die Vergleichung derselben Copie mit einer anderen findet man in Beilage C. Es ergibt sich daraus der Widerstand

$$\text{der ersten} = 0,9815 \cdot J$$

$$\text{der zweiten} = 0,9839 \cdot J$$

$$\text{in Summa} = 1,9654 \cdot J$$

Die Vergleichung dieses Widerstands mit dem des Drahtes d , nach der Beilage C beschriebenen Methode, ergab für d :

$$d = 1,1295 \cdot 1,9654 \cdot J = 2,220 \cdot J$$

Die Vergleichung dieses letzteren Widerstands nebst dem der beiden Copien mit dem des Drahtes c ergab aber für c

$$c = 0,993 \cdot (2,220 + 1,9654) \cdot J = 4,156 \cdot J$$

folglich, da c nach absolutem Maasse $2487 \cdot 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$ ist,

$$J = 598 \cdot 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} = 807 \frac{\text{Meile}}{\text{Secunde}}.$$

Herr Inspector Leyser in Leipzig hat eine Anzahl Copien des Jacobi'schen Etalons dargestellt, deren Widerstand nach genauer, von Herrn Dr. Quintus Icilius ausgeführter Prüfung sowohl in Theilen des Jacobi'schen als des absoluten Maasses angegeben ist.

23.

Ueber Neumanns Inductions - Constante und Kirchhoffs Bestimmung derselben.

In Poggendorffs Annalen 1849. Bd. 76. S. 412 ff. ist soeben eine Abhandlung des Hrn. Dr. G. Kirchhoff in Berlin erschienen: „Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducierter elektrischer Ströme abhängt“.

Herr Kirchhoff sagt: „Die mathematischen Gesetze der inducierten elektrischen Ströme sind von Neumann und Weber aufgestellt worden; in dem Ausdrucke, den beide für die Intensität eines inducierten Stromes gefunden haben, kommt ausser Grössen, die in jedem gegebenen Falle gemessen werden müssen, eine Constante vor, die ein für alle Mal durch Versuche ermittelt werden muss, und die Neumann durch ε bezeichnet. Diese zu bestimmen habe ich unternommen.“

Diese von Kirchhoff bestimmte Constante ε steht nun in einer einfachen Relation zu dem von ihm gebrauchten Widerstandsmaasse und zu dem oben definierten absoluten Widerstandsmaasse, welche auf folgende Weise ausgesprochen werden kann.

Nach den oben festgesetzten Maassen für Stromintensitäten, elektromotorische Kräfte und für Widerstände hat man für die Stromintensität i , welche durch die elektromotorische Kraft e in einen geschlossenen Leiter, dessen Widerstand w ist, hervorgebracht wird, folgende Gleichung:

$$i = \frac{e}{w}.$$

Führt man nun andere Maasse ein, die sich zu jenen absoluten verhalten wie :

$$a : 1$$

$$b : 1$$

$$c : 1$$

und bezeichnet mit i' , e' , w' obige drei nach den neuen Maassen ausgedrückte Grössen, so erhält man

$$ai' = i, be' = e, cw' = w$$

folglich

$$ai' = \frac{be'}{cw'}$$

Eine genauere Prüfung und Vergleichung derjenigen Maasse, welche dem Neumann'schen Ausdrucke für die Intensität eines inducierten Stroms und Kirchhoffs Rechnung zum Grunde liegen, mit obigen Maassen ergibt, wenn Millimeter und Secunde als Raum- und Zeitmaass der Geschwindigkeitsmessung zum Grunde gelegt werden,

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ und } b = \sqrt{2}$$

und man hat also hiernach

$$i' = \frac{2e'}{cw'}$$

wofür man auch schreiben kann

$$i' = \frac{2}{c} \frac{e'}{w'}$$

Der constante Coefficient $\frac{2}{c}$, mit welchem in diesem Ausdrucke des inducierten Stroms die elektromotorische Kraft e' multipliciert ist, ist nun die von Neumann und Kirchhoff mit ϵ bezeichnete Constante. Zugleich ersieht man aus der gegebenen Darstellung, dass $c = \frac{2}{\epsilon}$ die Zahl ist, welche angiebt, um wie viel Mal das gewählte Grundmaass des Widerstandes grösser ist, als das Art. 10 definierte absolute Widerstandsmaass. Wählt man z. B. ein solches Grundmaass, für welches die Inductions-Constante $\epsilon = 1$ ist, so verhält sich dieses Grundmaass zu dem Art. 10 definierten wie 2:1. Nun findet Kirchhoff aus seinen Beobachtungen: „Es ist die Constante $\epsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1000 Fuss in der Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahts von einer Quadratlinie Querschnitt und 0,434 Zoll Länge annimmt.“ Diesen Angaben liegt das preussische Längenmaass zum Grunde. In Metermaass übersetzt heisst dies: Es ist die Constante $\epsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 313853 Millimeter in der

Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahtes von 4,75 Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge annimmt.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass $\varepsilon = 1$ bleibt, so lange als das hier angegebene Verhältniss der beiden Maasse, des Geschwindigkeitsmaasses und des Widerstandsmasses, unverändert bleibt. Es ist daher die Constante $\varepsilon = 1$, auch wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahtes von $4,75 \cdot 313853$ Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge wählt.

Da nun dann für $\varepsilon = 1$, $c = 2$ ist, so ergibt sich, dass dieses Maass des Widerstands 2 Mal grösser ist, als das Art. 10 definierte absolute Maass des Widerstands.

Aus Kirchhoffs Beobachtungen ergibt sich also nach der angegebenen Reduction das Art. 10 definierte Maass des absoluten Widerstands gleich dem Widerstande eines Kupferdrahtes von $4,75 \cdot 313853$ Quadratmillimeter Querschnitt und 5,675 Millimeter Länge, oder von 262752 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge.

Aus den in dieser Abhandlung mitgetheilten Beobachtungen hat sich dagegen nach Art. 22 ergeben, dass der Jacobi'sche Kupferdraht bei $0,3335^2 \cdot \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7649,75 Millimeter Länge einen $598 \cdot 10^7$ Mal grösseren Widerstand besass, als das Artikel 10 definierte absolute Widerstandsmaass, und dass folglich von diesem Kupfer der Widerstand eines Kupferdrahtes von $0,3335^2 \cdot 598 \cdot 10^7 \cdot \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7649,75 Millimeter Länge oder der Widerstand eines Kupferdrahtes von 274250 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge dem Widerstandsmaasse gleich sei.

Die Uebereinstimmung dieser beiden auf ganz verschiedenen Wegen erhaltenen Angaben kann nicht grösser erwartet werden, wenn man beachtet, dass die Drähte von Jacobi und von Kirchhoff von verschiedenem Kupfer gemacht waren, und dass in der Leitungsfähigkeit oder in dem Widerstandscoefficienten des Kupfers oft noch weit grössere Differenzen vorkommen. Setzt man die Differenz der beiden Angaben bloss auf Rechnung der Verschiedenheit des Kupfers, so ergibt sich, dass das von Jacobi gebrauchte Kupfer eine etwas geringere Lei-

tungsfähigkeit oder einen etwas grösseren Widerstandscoefficienten besass, als das von Kirchhoff gebrauchte. Auch ich habe den Widerstandscoefficienten des von mir gebrauchten Kupfers kleiner, als den des von Jacobi gebrauchten gefunden, und der Unterschied war sogar noch beträchtlich grösser, als bei dem von Kirchhoff gebrauchten Kupfer. Eine unmittelbare Vergleichung des Widerstands des Kirchhoff'schen Drahtes mit dem Jacobi'schen Grundmaasse würde daher von besonderem Interesse sein zur genauern Vergleichung der Resultate beider Messungen.

III.

BEISPIELE DER ANWENDUNG DES ABSOLUTEN WIDERSTANDS- MAASSES.

24.

Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung galvanischer Ströme bei technischer Benutzung derselben.

Für die technischen Anwendungen des Galvanismus, z. B. zu chemischen Zwecken und zur Galvanoplastik, fehlt es oft an einfachen und allgemein verständlichen Vorschriften. Jeder Techniker ist daher genöthigt, durch eigene Versuche die Verhältnisse zu erproben, welche günstige Resultate geben. Der dadurch verursachte Zeit- und Kostenaufwand erschwert diese Anwendungen des Galvanismus besonders bei grösseren Unternehmungen. Solche Vorschriften fehlen aber nicht sowohl darum, weil noch keine genügenden Erfahrungen gemacht wären, als vielmehr weil die Resultate der gemachten Erfahrungen sich nicht einfach und bestimmt aussprechen lassen; denn bloss Beschreibungen des Verfahrens genügen dazu nicht. Nur durch galvanische Maassbestimmungen ist es möglich, die Resultate der gemachten Erfahrungen mit wenigen Worten und Zahlen allgemein verständlich darzulegen und bestimmte und genaue Vorschriften zum künftigen Gebrauche zu geben, und ebenso nothwendig sind die galvanischen Maassbestimmungen in der Anwendung, um sich der Erfüllung der vorgeschriebenen Regeln zu versichern.

Es handelt sich dabei um die Wirksamkeit des galvanischen Stroms, die aber nach Verschiedenheit der Umstände sehr verschieden zu bemessen ist. Oft ist es die blosse Stromintensität, um welche es sich handelt, z. B. bei galvanoplastischen Niederschlägen. Oft ist aber die Stromintensität nur der eine Factor der fraglichen Wirksamkeit, deren anderer Factor die Länge des Leiters ist, welcher diesen Strom führt, z. B. wenn der Leiter um einen Eisenstab geht, welcher in einen Elektromagnet verwandelt werden soll. Endlich kommt auch der Fall vor, dass von dieser Länge des Leiters, durch welchen der Strom geführt wird, jeder Theil mit einem besonderen Werthe für die fragliche Wirksamkeit in Betracht zu ziehen ist, z. B. bei einem Multiplicator, dessen verschiedene Windungen eine verschieden günstige Lage gegen die Magnethadel haben.

Der einfachste und für die technische Anwendung wichtigste Fall ist der erste, wo die fragliche Wirksamkeit bloss von der Stromintensität abhängt. Die Errichtung galvanischer Werkstätten und die mannigfaltigen darin auszuführenden Arbeiten würden sehr erleichtert und gefördert werden, wenn die für jeden Zweck günstigste Stromintensität genau ermittelt und bequeme Mittel an die Hand gegeben würden, zur Prüfung, ob bei der Ausführung diese Stromintensität stattfinde.

Was die Erforschung und genaue Bestimmung der günstigsten Stromintensitäten betrifft, so bietet das von Faraday zu diesem Zwecke angegebene Voltameter, wo die durch die Zersetzung des Wassers in einer bestimmten Zeit erzeugte Menge Gas diese Intensität anzeigt, ein sehr einfaches Mittel dazu dar, dessen Gebrauch daher nicht genug empfohlen werden kann. Nur ist dasselbe bei schwachen Strömen, wo die Wasserzersetzung sehr langsam geschieht, nicht anwendbar. Ausserdem würde das Voltameter in der gewöhnlichen Praxis, wenn es zur Prüfung der vorschriftsmässigen Stromintensität fortwährend gebraucht werden sollte, nicht immer bequem sein, weil die Zeit als ein wesentliches Element dabei gemessen werden muss. Endlich muss das Voltameter fortwährend in der Kette eingeschaltet bleiben, weil die Stromintensität bei Wegnahme desselben nicht mehr die gemessene bleibt, sondern viel stärker wird. Die mit der Einschaltung verbundene Schwächung des Stroms kann aber in manchen Fällen sehr unvorthailhaft sein. In allen Fällen, wo aus den angeführten Gründen der Ge-

brauch des Voltameters nicht praktisch ist, kann dessen Stelle durch eine Tangenten-Boussole ersetzt werden, die in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 85 f. beschrieben und deren Gebrauch zu Intensitätsmessungen daselbst durch Beispiele erläutert worden ist. Es sind dort auch die Angaben der Tangenten-Boussole auf Angaben des Voltameters zurückgeführt und beide unter einander vergleichbar gemacht worden. Jede Einheit der nach dieser Vorschrift mit der Tangenten-Boussole gemessenen Stromintensität zersetzt in 1 Secunde 0,009376 oder in 1 Min. $46\frac{2}{3}$ Sec. 1 Milligramm Wasser im Voltameter (etwa 1 Gran in $\frac{1}{2}$ Stunde). Zum Gebrauche der Tangenten-Boussole ist keine Uhr nöthig und die Einschaltung oder Ausschliessung des Instruments aus der Kette hat auf die Stromintensität keinen merklichen Einfluss.

Ein drittes praktisches Hülfsmittel zur Bestimmung der Stromintensität bietet endlich die Widerstandsmessung dar. Die Stromintensität hängt von zweierlei ab, von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, wovon bei technischem Gebrauche in der Regel nur die Veränderlichkeit des letzteren in Betracht kommt. Denn in der Regel wird bei technischen Anstalten immer die nämliche Gattung von Bechern gebraucht, deren elektromotorische Kraft mit einer für praktische Zwecke genügenden Schärfe ein für alle Mal bestimmt sein kann. Der von diesen Bechern ausgehende Strom wird dagegen bald durch mehr, bald durch weniger Gefässe und durch verschiedene Flüssigkeiten geleitet, wodurch der Widerstand sich sehr ändert.

Setzt man die Kenntniss der elektromotorischen Kraft E voraus, und kommt es also nur noch auf die Messung des Widerstands an, so kann jedes beliebige Galvanometer zur Bestimmung der Stromintensität gebraucht werden, wenn man sich dabei eines nach absolutem Maasse bekannten Widerstandsetalons w bedient. Denn bezeichnet a die Angabe des Galvanometers, wenn dieser Etalon von der Kette ausgeschlossen ist, und b , wenn derselbe eingeschaltet wird, so ist dadurch der Widerstand der Kette nach absolutem Maasse W bestimmt, nämlich:

$W = \frac{bw}{a-b}$

und die Stromintensität ergibt sich dann einfach:

$$\frac{E}{W} = \frac{a-b}{bw} \cdot E.$$

25.

Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung elektromotorischer Kräfte nach absolutem Maasse.

Die letzte Bemerkung im vorigen Artikel führt zu einer weiteren Anwendung, welche man von einem nach absolutem Maasse bekannten Widerstandsetalon machen kann. Denn aus dem Gesagten folgt, dass, wenn man sich statt eines beliebigen Galvanometers einer Tangenten-Boussole oder Voltameters, oder irgend eines andern Instrumentes, bedient, mit welchem man die Stromintensität nach absolutem Maasse bestimmen kann, auf dem angegebenen Wege die elektromotorische Kraft E selbst nach absolutem Maasse gefunden werde, wenn sie noch unbekannt ist. Denn bezeichnet man die nach absolutem Maasse gemessene Stromintensität mit α , wenn der Widerstandsetalon aus der Kette ausgeschlossen ist, mit β , wenn er eingeschaltet wird, so ergibt sich eben so, wie vorher, der Widerstand W der Kette nach absolutem Maasse:

$$W = \frac{\beta w}{\alpha - \beta}$$

und daraus die elektromotorische Kraft E nach absolutem Maasse:

$$E = \alpha W = \frac{\alpha \beta w}{\alpha - \beta}.$$

Man ersieht daraus zum Beispiel, wie die elektromotorischen Kräfte galvanischer Becher auf diese Weise nach demselben absoluten Maasse bestimmt werden können, wie die elektromotorischen Kräfte, welche der Erdmagnetismus auf geschlossene Ketten, während sie bewegt werden, ausübt. Es ist aber wichtig, elektromotorische Kräfte, welche aus so verschiedenen Quellen entspringen, wie die hydroelektrischen und magnetoelektrischen Kräfte, nach gleichem Maasse zu messen, weil dadurch der Weg zur comparativen Erforschung dieser Quellen selbst gebahnt wird. Es ist das bei Anwendung eines Leiters von bekanntem absoluten Widerstande leicht und einfach, ohne einen solchen Leiter aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden, wie zum Beispiel, wenn die Vergleichung auf folgende Weise geschehen sollte.

Der galvanische Becher, dessen elektromotorische Kraft, ohne einen Leiter von bekanntem absoluten Widerstande anzuwenden, mit einer magnetoelektrischen Kraft verglichen werden soll, sei durch einen Lei-

ter von beliebiger Länge und Gestalt geschlossen und sammt demselben drehbar. Bei der Drehung entsteht dann ein zweiter Strom in der Kette, nämlich ausser dem Strome, welcher von der elektromotorischen Kraft des Bechers selbst entspringt, noch ein anderer Strom, welcher von der elektromotorischen Kraft des Erdmagnetismus herrührt. Man hat es in seiner Gewalt, durch die Richtung der Drehung zu bewirken, dass die Richtung beider Ströme in der Kette entgegengesetzt sei. Durch die Geschwindigkeit der Drehung kann man andererseits die Intensität beider Ströme wenigstens für einen kleinen Zeitraum gleich machen, wo sich dann beide Ströme für diesen Zeitraum annulliren. Sind aber die Intensitäten beider Ströme gleich, so folgt daraus für diesen Fall die Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, d. h. die Gleichheit der elektromotorischen Kraft des Bechers mit der elektromotorischen Kraft des Erdmagnetismus. Die letztere ist durch den bekannten Werth des Erdmagnetismus und durch die Form und Drehung der geschlossenen Kette nach absolutem Maasse unmittelbar gegeben; folglich wird dadurch zugleich auch die elektromotorische Kraft des Bechers nach demselben Maasse gefunden. Es leuchtet aber von selbst ein, dass die Vergleichung dieser Kräfte auf die oben angegebene Weise mit Hülfe des absoluten Widerstandsmaasses viel einfacher und leichter erhalten wird.

IV.

ÜBER DIE PRINCIPIEN VERSCHIEDENER ABSOLUTER MAASSSYSTEME IN DER ELEKTRODYNAMIK.

26.

Selbstständige Begründung der absoluten Maasse in der Elektrodynamik, ohne auf die magnetischen Maasse Bezug zu nehmen.

Wie für die Grösse der Geschwindigkeiten kein eigenes Grundmaass aufgestellt zu werden braucht, wenn solche Maasse für Raum und Zeit schon gegeben sind, eben so braucht, wie wir gesehen haben, für die Grösse der galvanischen Widerstände kein eigenes Grundmaass aufgestellt zu werden, wenn schon Maasse für die Grösse der

elektromotorischen Kräfte und der Stromintensitäten gegeben sind. Aber auch für die beiden letzteren Grössenarten brauchen keine eigenen Grundmaasse angenommen zu werden, sondern es können auch dafür absolute Maasse gegeben werden, welche nach den Art. 10 gegebenen Definitionen durch Vermittelung der magnetischen Maasse auf die drei Grundmaasse der Mechanik zurückgeführt worden sind.

Für die meisten elektrodynamischen Messungen ist es nun zwar genügend und bequem, die Maasse für die elektrodynamischen Grössen auf die festgestellten magnetischen Maasse so zu reducieren, wie es Art. 10 geschehen ist. Die Abhängigkeit, in welcher hierdurch die elektrodynamischen Maasse von den magnetischen gebracht werden, ist aber in der Sache selbst keineswegs begründet, wie aus der Unabhängigkeit der elektrodynamischen Grundgesetze von den magnetischen von selbst einleuchtet. Die elektrodynamischen Maasse lassen sich vielmehr noch auf andere Weise begründen, wodurch sie von der Begründung der magnetischen Maasse ganz unabhängig werden. Es ist dazu bloss nöthig, statt von den Grundgesetzen des Elektromagnetismus und der Magneto-Elektricität auszugehen, wie es Art. 10 geschehen ist, auf die Grundgesetze der Elektrodynamik und Volta-Induction zurückzugehen.

Das Grundgesetz der Elektrodynamik giebt folgende Formel für die Grösse der Abstossungskraft zweier Stromelemente α , α' mit den Stromintensitäten i , i' aus der Entfernung r , welche mit den beiden Stromrichtungen die Winkel θ , θ' macht, während der Winkel der beiden Stromrichtungen $= \varepsilon$ ist, nämlich:

$$= \frac{\alpha\alpha'}{rr} i i' \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right).$$

Das Grundgesetz der Volta-Induction, wie es Art. 30 der ersten Abhandlung über «Elektrodynamische Maassbestimmungen» angegeben worden ist, giebt folgende Formel für die von einem Stromelemente α mit der Stromintensität i auf ein anderes Element α' aus der Entfernung r ausgeübte elektromotorische Kraft, wenn r mit der Stromrichtung und mit der Richtung, nach welcher α' mit der Geschwindigkeit v verschoben wird, die Winkel θ und θ' macht, die beiden letzteren Richtungen gegen einander den Winkel ε :

$$= \frac{\alpha\alpha'}{rr} v i \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} \cos \theta \cdot \frac{di}{dt}$$

Diese nach der Richtung r wirkende Kraft ist nach der Richtung von α' zu zerlegen, weil die gegen α' senkrechte Componente aufgehoben wird. Bezeichnet η den Winkel, welchen α' mit r macht, so ist obige Formel also mit $\cos \eta$ zu multiplicieren.

Auf diese Grundgesetze lässt sich nun erstens ein absolutes Maass der Stromintensität, unabhängig von den magnetischen Maassen, auf folgende Weise begründen:

Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Strom besitzt, der — indem er eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft und auf einen gleichen Strom, der eine eben solche Ebene umläuft, aus einer grossen Entfernung R wirkt, und bei rechtwinkliger Lage beider Ebenen, bei welcher die verlängerte erste Ebene die zweite halbt — auf den letzteren Strom ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zur Einheit des Drehungsmoments wie $1 : 2R^3$ verhält.

Dieses neue absolute Maass der Stromintensität lässt sich noch einfacher definieren, wenn dabei gestattet wird, statt auf die Wechselwirkung geschlossener Ströme auf die Wechselwirkung einzelner Stromelemente zurückzugehen, welche sich nicht unmittelbar beobachten lässt, weil solche Stromelemente nur als Theile geschlossener Ströme vorkommen, nämlich:

Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Stromelement besitzt, wenn es auf ein gleiches, paralleles und auf der Verbindungslinie senkrecht stehendes Stromelement aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung eine Anziehungskraft ausübt, welche sich zum Kraftmaasse verhält, wie das Quadrat der Länge jener Stromelemente zum Flächenmaasse.

Dieses zweite absolute Maass der Stromintensität ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu wie $1 : \sqrt{2}$. *)

*) Die Ableitung der oben aufgestellten Definitionen aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik ist folgende. Erste Definition. Es ist schon Art. 9 der früheren Abhandlung «Elektrodynamische Maassbestimmungen» Leipzig, 1846. an-

Zweitens, das Maass der elektromotorischen Kraft wird auf folgende Weise auf das angeführte Grundgesetz der Volta-Induction, unabhängig von den magnetischen Maassen, begründet.

gegeben worden, wie aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik folgender Ausdruck des von einem Planstrome auf einen andern in der Ferne ausgeübten Drehungsmoments hergeleitet werde, nämlich:

$$\frac{1}{2} \frac{i i' \lambda \lambda'}{r^3} \sin \delta \cdot \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

wo i, i' die Stromintensitäten, λ, λ' die umströmten Ebenen, r den Abstand ihrer Mittelpunkte, ψ den Winkel der Normale des ersten Planstroms mit r , δ den Winkel bezeichnet, welchen die Normale des zweiten Planstroms mit der Directionskraft einschliesst. Die Directionskraft aber ist in der durch die Normale des ersten Planstroms A und durch den Mittelpunkt des zweiten Planstroms C gelegten Ebene enthalten und ist in dem bei C rechtwinkligen Dreiecke ACB , dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreiecksseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$. — Unter den in der ersten Definition bezeichneten Verhältnissen ist nun $i = i', \lambda = \lambda' = 1, \delta = \psi = \frac{\pi}{2}, r = R$, wonach das Drehungsmoment den Werth

$$\frac{ii}{2R^3}$$

erhält, welcher zur Einheit des Drehungsmoments sich verhält wie $1 : 2R^3$, wenn $i = 1$ ist.

Zweite Definition. In dem durch das Grundgesetz der Elektrodynamik unmittelbar gegebenen Ausdrücke der Anziehungskraft zweier Stromelemente

$$\frac{\alpha \alpha'}{rr} i i' (\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta')$$

ist für die in der Definition bezeichneten Verhältnisse $i = i', \alpha = \alpha', \theta = \theta' = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = 0, r = 1$, wodurch die Anziehungskraft den Werth

$$\alpha \alpha i i$$

erhält, welcher sich zum Kraftmaasse verhält, wie $\alpha \alpha : 1$, wenn $i = 1$ ist.

Es ist noch übrig, nachzuweisen, dass das zweite hier aufgestellte absolute Maass der Stromintensität zu dem ersten, von dem magnetischen Maasse abhängigen, sich verhalte, wie $1 : \sqrt{2}$. — Es ist schon in Art. 9 a. a. O., bekannten Gesetzen gemäss, der Ausdruck des von einem Magnet m auf einen andern m' in der Ferne r ausgeübten Drehungsmoments angegeben worden, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3} \sin \delta \cdot \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

wo ψ und δ die angeführte Bedeutung haben, wenn man darin die Normalen der beiden Planströme mit den Axen der beiden Magnete vertauscht. Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung der beiden Maasse der Stromintensität, mit K das erste, von den magnetischen Maassen abhängige, mit J das zweite, so seien kK und $k'K$ zwei bestimmte, nach dem erstern Maasse ausgedrückte, Stromintensitäten, und iJ und $i'J$ seien die nämlichen Stromintensitäten, nach dem zweiten Maasse ausgedrückt, folglich:

$$iJ = kK \text{ und } i'J = k'K.$$

Dem Grundgesetze des Elektromagnetismus gemäss bleibt dann obiges Drehungs-

Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Strom, der eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft, auf einen eine gleiche, auf jene senkrechte und von ihr halbierte, Ebene begrenzenden Leiter aus der grossen Entfernung R ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten absoluten Maasse sich verhält, wie $2R^3 : 1$, während der Leiter mit der Einheit der Drehungsgeschwindigkeit um die Durchschnittsline beider Ebenen gedreht wird.

Wird es gestattet, auf die elektromotorische Kraft einzelner Stromelemente zurückzugehen, so lässt sich diese Definition einfacher auf folgende Weise fassen:

Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement auf ein gleich langes, darauf senkrechtes, der Verbindungslinie paralleles Leiterelement aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten absoluten Maasse sich verhält, wie das Flächenmaass zum Quadrat der Länge jener Elemente, während das Leiter-Element mit der Einheit der Geschwindigkeit der Stromrichtung entgegengesetzt parallel verschoben wird. *)

moment unverändert, wenn man für den Magnet m den Strom kK setzt, welcher eine Ebene $\lambda = \frac{m}{k}$ umläuft. Setzt man auf gleiche Weise für den Magnet m' den Strom $k'K$, welcher eine Ebene $\lambda' = \frac{m'}{k'}$ umläuft, so erhält man das von dem ersten Planstrome auf den zweiten ausgeübte Drehungsmoment,

$$\frac{kk'\lambda\lambda'}{r^3} \sin \delta \cdot \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

Für dieses Drehungsmoment ist oben aber folgender Werth gefunden worden:

$$\frac{1}{2} \frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \sin \delta \cdot \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}.$$

woraus $\frac{1}{2} ii' = kk'$ folgt, d. i., wenn $k = k'$, $i = i'$,

$$i = k\sqrt{2}.$$

Hiernach ergibt sich aus der Gleichung $iJ = kK$

$$J : K = 1 : \sqrt{2}.$$

*) Um die erste dieser beiden neuen Definitionen eines absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft aus dem allgemeinen Gesetze der Volta-Induction abzuleiten, beachte man zunächst, dass der inducierende Strom i in dieser Definition constant genommen ist, also $\frac{di}{dt} = 0$, wodurch der allgemeine Ausdruck der nach der Richtung r wirksamen elektromotorischen Kraft auf folgenden reducirt wird:

$$- \frac{aa'}{rr} v i (\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta').$$

Wie nun aber aus dem ähnlichen Ausdrücke der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$- \frac{aa'}{rr} ii' (\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta')$$

Dieses zweite absolute Maass der elektromotorischen Kraft ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu, wie $\sqrt{2} : 1$.

sich die Richtung und die Grösse der Kraft ergeben hat, welche ein Strom i , welcher die Ebene λ umläuft, auf das Stromelement α' ausübt, nämlich erstens die Richtung als senkrecht gegen die durch die Stromrichtung i' und die Directionskraft gelegte Ebene (die Directionskraft ist in der durch die Normale des inducierenden Planstroms A und durch den Mittelpunkt des inducierten Elements C gelegten Ebene enthalten, und ist in dem bei C rechtwinkligen Dreiecke ACB , dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreiecksseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$); zweitens die Grösse der Kraft

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda \alpha'}{r^3} i i' \sin \delta \cdot \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r , δ den Winkel bezeichnet, welchen die Stromrichtung in α' mit der Directionskraft macht —; auf ähnliche Weise ergibt sich auch aus dem vorhergehenden Ausdrucke der elektromotorischen Kraft, welche ein Stromelement auf ein Leiter-Element nach Richtung der sie verbindenden Geraden ausübt, die Richtung und die Grösse der elektromotorischen Kraft, welche der ganze, die Ebene λ umlaufende, Strom i auf das Leiter-Element α' ausübt, nämlich erstens die Richtung senkrecht gegen die durch die Bahn, in welcher α' verschoben wird, und durch die Richtung der Directionskraft gelegte Ebene, zweitens die Grösse

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda \alpha'}{r^3} v i \sin \delta \cdot \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r , δ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung, nach welcher α' verschoben wird, mit der Directionskraft macht. (S. Art. 9 a. a. O. S. 264 in der Note, wobei zu bemerken ist, dass dort ε die nämliche Bedeutung hat, wie hier δ , dass aber in der Formel für die Kraft, welche ein Planstrom auf das bewegte Element eines Leiters ausübt, der von der Richtung der Bewegung dieses Elements abhängige Factor $\sin \varepsilon$ aus Versehen weggelassen worden ist.)

Gehört nun ferner auch das Leiter-Element α' der Begrenzung einer Ebene λ' an, deren Normale der Richtung, nach welcher die Leiter-Elemente (in Folge einer Drehung des Leiters um eine seine Ebene halbierende Axe) verschoben werden, parallel ist und also mit der Directionskraft den Winkel δ macht: so zerlege man jedes Element α' der Begrenzungslinie in zwei Elemente ds und $d\sigma$, das eine parallel der Linie, in welcher eine auf die Directionskraft CD normale Ebene die Ebene des Leiters schneidet, das andere senkrecht auf dieser Schneidungslinie. Die ersteren Elemente kann man paarweise von gleicher Länge $ds = ds'$ ordnen und durch Perpendikel α auf jener Schneidungslinie verbinden. Bezeichnet man mit a, b, c die Abstände der Elemente ds und ds' und des Durchschnittspunkts des Perpendikels α mit der Drehungsaxe von jener Schneidungslinie, und ferner mit γ die Drehungsgeschwindigkeit und mit δ' den Winkel der die Ebene des Leiters halbierenden Drehungsaxe mit jener Schneidungslinie, so ist, wenn v und v' die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit welcher die Elemente ds und ds' verschoben werden,

Drittens leuchtet von selbst ein, dass nun auch die Begründung des dritten elektrodynamischen Maasses, nämlich des Widerstandes, unabhängig von den magnetischen Maassen gemacht wird,

$$\begin{aligned} a - b &= x \\ (a - c) \gamma \cos \delta' &= v \\ (b - c) \gamma \cos \delta' &= v'. \end{aligned}$$

Beachtet man ferner, dass die oben angegebene Richtung der elektromotorischen Kraft mit dem einen Elemente ds direct parallel, mit dem andern ds' entgegengesetzt parallel ist, und dass die Länge $ds = ds'$, so erhält man die nach der Richtung beider Elemente zerlegten elektromotorischen Kräfte:

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \frac{\lambda i}{r^3} \sin \delta \cdot V(1 + 3 \cos \psi^2) \cdot \gamma \cos \delta' \cdot (a - c) ds \\ &- \frac{1}{2} \frac{\lambda i}{r^3} \sin \delta \cdot V(1 + 3 \cos \psi^2) \cdot \gamma \cos \delta' \cdot (b - c) ds \end{aligned}$$

folglich ihre Summe:

$$+ \frac{1}{2} \frac{\lambda i}{r^3} \cdot \gamma \cos \delta' \sin \delta \cdot V(1 + 3 \cos \psi^2) \cdot x ds.$$

Hieraus folgt endlich die Summe aller auf die mit obiger Schneidungslinie parallelen Elemente des geschlossenen Leiters ausgeübten elektromotorischen Kräfte nach der Richtung des Leiters zerlegt:

$$+ \frac{1}{2} \frac{\lambda i}{r^3} \cdot \gamma \cos \delta' \sin \delta \cdot V(1 + 3 \cos \psi^2) \cdot \int x ds,$$

das heisst, da das Integral $\int x ds$ die Grösse der begrenzten Ebene λ' bezeichnet,

$$+ \frac{1}{2} \frac{\lambda \lambda'}{r^3} i \gamma \cos \delta' \sin \delta \cdot V(1 + 3 \cos \psi^2).$$

Betrachtet man auf ähnliche Weise die auf alle gegen obige Schneidungslinie senkrechten Elemente $d\sigma$ wirkenden, nach deren Richtung zerlegten elektromotorischen Kräfte, so findet man ihre Summe $= 0$; folglich ist die obige Formel der Ausdruck der ganzen elektromotorischen Kraft, welche der Planstrom auf den geschlossenen Leiter ausübt.

Wendet man nun diesen Ausdruck auf die in der ersten Definition bezeichneten Verhältnisse an, wo nämlich $i = i'$, $\lambda = 1$, $r = R$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\varepsilon = \psi = \frac{\pi}{2}$ ist, so ergibt sich der Werth der elektromotorischen Kraft

$$\frac{i}{2R^3},$$

d. i. $= 1$, wenn $i = 2R^3$ ist.

Zweite Definition. Der oben angeführte allgemeine Ausdruck der elektromotorischen Kraft eines Stromelements auf ein Leiterelement:

$$- \frac{\alpha \alpha'}{rr} v i (\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta') \cos \eta - \frac{1}{2} \frac{\alpha \alpha'}{r} \cos \theta \cos \eta \cdot \frac{di}{dt}$$

reducirt sich in der Anwendung auf die in der zweiten Definition des absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft bezeichneten Verhältnisse, wo $\alpha = \alpha'$, $\varepsilon = \eta = 0$, $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$, $v = -1$, $\frac{di}{dt} = 0$, auf den Werth:

$$\alpha \alpha i,$$

d. i. auf die Einheit, wenn die Intensität des inducierenden Stroms i zum festgesetzten Maasse der Intensität sich verhält, wie $1 : \alpha \alpha$.

Das Verhältniss endlich dieses zweiten hier aufgestellten absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft zu dem ersten, von den magnetischen Maassen abhän-

wenn in der Art. 10 gegebenen Definition die von den magnetischen Maassen abhängigen absoluten Maasse der Stromintensität und der elektromotorischen Kraft mit den neuen, davon unabhängigen Maassen vertauscht werden, wobei übrigens die Definition ganz unverändert bleibt. Es ergibt sich dann aus den angegebenen Verhältnissen dieser neuen Maasse zu den alten, dass das neue absolute Maass des Widerstands zu dem Art. 10 definierten sich verhält, wie 2 : 1.

gigen, ergibt sich, wie folgt. Setzt man in dem in voriger Note angeführten Ausdruck des Drehungsmoments, welches ein Magnet m auf einen andern m' in der Ferne r ausübt, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3} \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2)$$

für den Magnet m' einen Strom $k'K$, welcher die Ebene $\lambda' = \frac{m'}{k'}$ umläuft, so erhält man das auf diesen Strom vom Magnet m ausgeübte Drehungsmoment

$$\frac{m\lambda'}{r^3} k' \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2)$$

und hieraus nach den bekannten Relationen, welche zwischen den elektromagnetischen und den magnetoelektrischen Gesetzen stattfinden, und die man am Ende dieser Abhandlung in Beilage D. näher erörtert findet, die elektromotorische Kraft, welche der Magnet m auf den geschlossenen Stromleiter ausübt, indem derselbe mit der Einheit der Geschwindigkeit in der jenem Drehungsmomente entgegengesetzten Richtung gedreht wird, wenn $k' = 1$ gesetzt wird, nämlich:

$$\frac{m\lambda'}{r^3} \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2).$$

Setzt man hierin endlich auch für den Magnet m einen Strom kK , welcher die Ebene $\lambda = \frac{m}{k}$ durchläuft, so erhält man die elektromotorische Kraft, welche dieser Strom auf jenen geschlossenen Stromleiter ausübt, bei der beschriebenen Drehung desselben,

$$\frac{\lambda\lambda'}{r^3} k \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2)$$

nach dem ersten Maasse ausgedrückt, die nach dem zweiten Maasse ausgedrückt

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \gamma \cos \delta' \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2)$$

war, d. i.

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2),$$

wenn man beachtet, dass $\gamma = 1$ und $\cos \delta' = 1$ ist.

Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung beider Maasse, mit E das erste, mit E' das zweite, und bezeichnet dieselbe elektromotorische Kraft nach beiden Maassen mit eE und $e'E'$: so ergibt sich, wenn man beachtet, dass $i = k\mathcal{V}2$ war,

$$e = \mathcal{V} \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2)$$

$$e' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin \delta \cdot \mathcal{V}(1 + 3 \cos \psi^2)$$

folglich, da $eE = e'E'$ ist:

$$E' : E = e : e' = \mathcal{V}2 : 1.$$

27.

Ueber das Verhältniss der absoluten Maasse in der Elektrodynamik zu denen in der Mechanik.

Eine elektromotorische Kraft ist jede Kraft, welche die beiden elektrischen Fluida an einem Orte nach entgegengesetzten Richtungen zu bewegen sucht. Solche Kräfte sind nun aber alle nach dem Grundgesetze der Elektrostatik bestimmten Kräfte; denn alle diese Kräfte sind Anziehungs- und Abstossungskräfte, und zwar ist die nämliche Kraft, welche für das eine elektrische Fluidum eine Anziehungskraft ist, für das andere nothwendig eine Abstossungskraft. Da nun alle Arten von elektromotorischen Kräften unter einander vergleichbar sind und daher alle nach demjenigen Maasse ausgedrückt werden können, nach welchem irgend eine derselben gemessen worden ist, so leuchtet ein, dass alle Arten von elektromotorischen Kräften nach dem in der Elektrostatik für elektrische Kräfte festgesetzten Maasse müssen ausgedrückt werden können, und dass man daher für die elektromotorischen Kräfte keines anderen Maasses als für die elektrostatischen Kräfte bedarf. In der Elektrostatik werden aber die elektrischen Kräfte auch nicht nach einem besonderen Maasse, sondern nach gleichem Masse, wie alle Kräfte in der Mechanik, gemessen, indem diejenige Kraft zum Maasse genommen wird, welche der ponderabelen Masseneinheit, wenn sie darauf wirkt, die Einheit der Beschleunigung ertheilt. Die auf ein elektrisches Theilchen ausgeübte elektrische Kraft ist hiernach $= 1$, wenn der ponderabelen Masseneinheit, an welcher das elektrische Theilchen haftet, die Einheit der Beschleunigung dadurch ertheilt wird. Man sieht hieraus, dass die Feststellung eines eigenen Maasses für die elektromotorischen Kräfte gar nicht nöthig ist, sondern dass dafür das für alle Kräfte in der Mechanik festgestellte Maass genügt.

Eine ähnliche Betrachtung findet Anwendung auf die Intensität elektrischer Ströme, wenn man in der Mechanik diejenige Stromstärke oder Stromintensität zum Maasse nimmt, bei welcher die Masseneinheit irgend einer Flüssigkeit während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Strombettes geführt wird. Da nun die Masseneinheit der elektrischen Flüssigkeiten in der Elektrostatik schon bestimmt ist, näm-

lich als diejenige Masse, welche auf eine ihr gleiche Masse in der Entfernung R eine Kraft ausübt, die sich zum Kraftmaasse verhält, wie $1 : RR$; so leuchtet ein, dass man keines besonderen Maasses für die Intensität elektrischer Ströme bedarf.

Soll nun hiernach der Gebrauch aller besonderen Maasse für die elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten ganz beseitigt werden, so muss eine Regel gefunden werden, nach welcher die nach den bisherigen besonderen Maassen ausgeführten Messungen zu reducieren sind, um sie von diesen besonderen Maassen unabhängig darzustellen.

Um diese Regel zu finden, genügt es nicht, auf die Grundgesetze der Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction, sondern es ist nothwendig, auf das allgemeine Grundgesetz der Elektricitätslehre, welches die Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction zugleich umfasst und verbindet, zurückzugehen, welches in der früheren Abhandlung «Elektrodynamische Maassbestimmungen» Leipzig, 1846. aufgestellt worden ist. Nach diesem letztern Gesetze wird diese Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' in der Entfernung r , bei der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und der relativen Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ ausübt, durch

$$\frac{ee'}{rr} \left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc} \frac{ddr}{dt^2} \right)$$

dargestellt, wo $\frac{1}{cc}$ der nämliche constante Factor ist, welcher in jener Abhandlung mit $\frac{aa}{16}$ bezeichnet wurde.

Für einen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, ist $\frac{ddr}{dt^2} = 0$, folglich die Kraft

$$= \frac{ee'}{rr} \left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \right),$$

woraus sich ergibt, dass c denjenigen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ bedeutet, bei welchem zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben.

Nun ist ferner in der angeführten Abhandlung Art. 21 nachgewiesen worden, dass diejenige Zahl i , welche zu dem im vorhergehenden Artikel definierten Maasse J gefügt, irgend eine Stromintensität bestimmt,

$$i = aeu = \frac{4}{c} \cdot eu$$

ist, wo eu die Menge Elektricität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Leiters

geht. Wird nun dieselbe Stromintensität nach dem in der Mechanik festgesetzten allgemeinen Strommaasse K durch

$$kK = iJ$$

ausgedrückt, so ist

$$k = eu = \frac{c}{4} i.$$

Es ergibt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse ausgeführten Messungen zu reducieren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multipliciere die erhaltenen Werthe mit $\frac{c}{4}$. Man erhält dadurch den Werth der elektrischen Stromstärke nach dem allgemeinen Strommaasse in der Mechanik ausgedrückt.

Eben so ergibt sich aus Art. 24 der angeführten Abhandlung, dass eine elektromotorische Kraft, welche durch eine Zahl e und durch das im vorigen Artikel definierte besondere Maass E bestimmt ist, nach dem allgemeinen Maasse aller Kräfte in der Mechanik F durch die Zahl f bestimmt werde, so dass $fF = eE$ ist, wenn

$$f = \frac{4}{c} e$$

gemacht wird; denn es ist in dem angeführten Art. 24 folgender Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche ein constanter Strom auf einen bewegten Leiter ausübt, nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik gegeben:

$$f = - \frac{aa'}{rr} i (\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta') \cdot au' \cos \varphi.$$

Unter denjenigen Verhältnissen aber, für welche die hierdurch bestimmte elektromotorische Kraft dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse gleich wird, ist

$$\frac{aa'}{rr} i = 1, \varepsilon = 0, \theta = \frac{1}{2} \pi, \varphi = \pi, u' = 1$$

folglich ist, für $e = 1$, $f = a = \frac{4}{c}$, oder allgemein

$$f = \frac{4}{c} e.$$

Es ergibt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse ausgeführten Messungen elektromotorischer Kräfte zu reducieren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multipliciere die erhaltenen Werthe mit $\frac{4}{c}$. Man erhält dadurch den Werth der elektromotorischen Kraft nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt.

Soll endlich aus diesen allgemeinen Kraft- und Strommaassen der Mechanik, indem sie für die elektromotorischen Kräfte und elektrischen Ströme gebraucht werden, ein absolutes Widerstandsmass auf die nämliche Weise wie im vorhergehenden Artikel aus den dort definierten besonderen Maassen abgeleitet werden, so nämlich, dass derjenige Widerstand zum Maasse genommen wird, welchen eine Kette besitzen muss, damit das Maass der elektromotorischen Kraft das Strommaass hervorbringe; so ergibt sich, wenn w nach dem im vorhergehenden Artikel definierten Maasse den nämlichen Widerstand bezeichnet, welchen v nach dem neuen Maasse, folgende Gleichung:

$$v = \frac{46}{cc} w.$$

Die Geschwindigkeit c , mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie auf einander gar nicht wirken sollen, ist bis jetzt noch nicht ermittelt worden, und dies ist der Grund, warum die besonderen Maasse, wie die im vorigen Artikel definierten, zur Zeit noch für den praktischen Gebrauch in der Elektrodynamik unentbehrlich sind, weil ohne Kenntniss der Geschwindigkeit c die Reduction der gemessenen Stromintensitäten, elektromotorischen Kräfte und Widerstände auf die bekannten Maasse der Mechanik nicht ausgeführt werden kann.

V.

UEBER DEN ZUSAMMENHANG DER THEORIE DER GALVANISCHEN KETTE MIT DEN ELEKTRISCHEN GRUNDGESETZEN.

28.

Die Theorie der galvanischen Kette bildet an sich einen Theil der Elektrodynamik und es sollten darin die Gesetze der galvanischen Kette in ihrem Zusammenhange mit den elektrischen Grundgesetzen entwickelt werden. Dies ist bisher nicht geschehen; vielmehr ist die Theorie der galvanischen Kette für sich allein betrachtet worden und die Gesetze der galvanischen Kette sind theils unmittelbar aus der Erfahrung entnommen, theils aus Annahmen abgeleitet worden, welche

ganz unabhängig von den elektrischen Grundgesetzen aufgestellt worden sind. Namentlich gilt dies von den Gesetzen der galvanischen Kette, wie sie Ohm gegeben, deren Richtigkeit und praktische Bedeutung übrigens allgemein anerkannt wird. Der Grund, warum bisher eine solche Entwicklung der Theorie der galvanischen Kette aus den elektrischen Grundgesetzen noch nicht gegeben worden ist, dürfte hauptsächlich in den mathematischen Schwierigkeiten liegen, welche eine solche Entwicklung, wenn sie vollständig und streng sein soll, findet. Indessen mögen hier einige specielle Erörterungen Platz finden, welche den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen betreffen, und welche mit den in dieser Abhandlung betrachteten Gegenständen in näherem Zusammenhange stehen.

Im Laufe dieser Abhandlung ist häufiger auf die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette verwiesen worden, was nothwendig war, weil alle Widerstandsmessungen wesentlich auf diesen Gesetzen beruhen und selbst die Definition des Widerstands und des Widerstandsmaasses darauf begründet werden musste; denn der Widerstand wird im Grunde nur durch die nach den Ohm'schen Gesetzen für jeden geschlossenen Leiter in dem Verhältnisse der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität gegebene Constante definiert.

Die Ohm'schen Gesetze setzen voraus, dass die Intensität des elektrischen Stroms in allen Theilen der geschlossenen Kette gleich sei, wie es bei eingetretener Beharrlichkeit wirklich der Fall sein muss. Durch diese Voraussetzung ist das Gebiet, für welches die Ohm'schen Gesetze gelten, beschränkt und umfasst nicht alle Bewegungen der Elektrizität in der Kette; denn es sind davon z. B. alle Bewegungen ausgeschlossen, welche die Elektrizität in der Kette machen muss, ehe ein beharrlicher Zustand zu Stande kommt. Auch leuchtet ein, dass diese Gesetze nur in so weit erfahrungsmässig begründet sind, als sie die Abhängigkeit der in allen Theilen der Kette gleich gewordenen Stromintensität von der Summe aller elektromotorischen Kräfte in der Kette und von der Summe der Widerstände aller ihrer Theile betreffen, während ein wirkliches Grundgesetz die Stromintensität an irgend einer Stelle der Kette nur von der auf diese Stelle wirkenden elektromotorischen Kraft und von dem an dieser Stelle vorhandenen Widerstande abhängig machen darf. Nun hat zwar Ohm, um zu einem wirklichen Grundgesetze zu gelangen, die Verschiedenheit der elektrischen Ladung

der verschiedenen Theile der Kette in Betracht gezogen und hat das Gesetz zu begründen gesucht, dass bei gleicher Stromintensität der Unterschied der Ladung an zwei Stellen, zwischen welchen keine elektromotorische Kraft gegeben ist (kein Berührungspunkt verschiedener Metalle), dem Widerstande des zwischen beiden Stellen liegenden Theils der Kette proportional sei, und dass dagegen an einer solchen Stelle, wo eine elektromotorische Kraft gegeben ist (wo z. B. zwei verschiedene Metalle sich berühren), die Ladung von der einen Seite zur andern einen plötzlichen Sprung mache, und dass der Unterschied der Ladung auf beiden Seiten der für diese Stelle gegebenen elektromotorischen Kraft proportional sei; dass endlich bei verschiedener Stromintensität der Unterschied der elektromotorischen Ladung an zwei bestimmten Stellen desselben Leiters der Stromintensität proportional sei. Hierdurch geleitet, hat dann Ohm ein analoges Grundgesetz für die elektrische Strömung in jedem Theile der Kette in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Ladung aufgestellt, wie Fourier für die Wärmeströmung in jedem Theile eines Wärmeleiters in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der Temperatur, und hat nachgewiesen, dass die aus dieser Analogie gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen, so weit als deren Resultate verbürgt werden können.

Ohm hat wirklich in der Vertheilung der elektrischen Ladung den wahren Schlüssel gefunden zur Eröffnung des Uebergangs von dem erfahrungsmässig begründeten, die ganze geschlossene Kette umfassenden Gesetze zu dem wahren Grundgesetze, wie es allgemein von jedem Theile der Kette aufgestellt werden muss; was aber die Wirkung dieser elektrischen Vertheilung auf die Bewegung der Elektrizität betrifft, die er bloss nach der Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme betrachtet hat, so liegen Annahmen zu Grunde, welche weder nothwendig, noch zulässig erscheinen; denn die Wirkung der freien Elektrizität ist durch das allgemeine Grundgesetz der Elektrizitätslehre oder, wenn man von den relativen Bewegungen abstrahiert, durch das Grundgesetz der Elektrostatik schon gegeben und kann daraus für jede Vertheilung im Leiter berechnet werden, woraus sich leicht die Unzulässigkeit willkürlicher Annahmen nach blosser Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme nachweisen lässt. Schon was die Vertheilung selbst

betrifft, erscheint es hiernach unzulässig, eine andere Vertheilung der freien Elektricität als an der Oberfläche des Leiters anzunehmen. Ferner leuchtet ein wesentlicher Unterschied auch daraus ein, dass zwischen der Wärmefortpflanzung und der in der Richtung derselben vorhandenen Temperaturabnahme eine so nothwendige Beziehung stattfindet, dass erstere ohne die letztere gar nicht möglich ist. Eine solche Abhängigkeit der elektrischen Strömung von der Vertheilung der freien Elektricität findet in der galvanischen Kette nicht statt, weil die Kräfte, welche die elektrische Strömung hervorbringen, nicht bloss von der nächsten Umgebung, sondern auch aus grösseren Entfernungen wirken und daher ihren Sitz auch ganz ausserhalb des Leiters haben können, was bei einem Wärmeleiter nicht möglich ist.

Man nehme z. B. einen kreisförmigen kupfernen Ring zum Leiter, dessen Querschnitt überall gleich ist, und bewege in der durch seinen Mittelpunkt senkrecht auf seine Ebene gelegten Geraden einen Magnet. Der Magnet übt bekanntlich bei dieser Bewegung auf alle Ringelemente gleiche elektromotorische Kraft aus und es wird dadurch, weil allen Elementen auch gleicher Widerstand zukommt, eine gleiche elektrische Strömung gleichzeitig in allen Elementen hervorgebracht, woraus folgt, dass an keiner Stelle des Ringes eine grössere oder geringere Ansammlung von positiver oder negativer Elektricität entstehen kann. Wir haben hier also den Fall eines Stroms in einer geschlossenen Kette ohne eine Vertheilung freier Elektricität in der Kette. Das Gesetz der Abhängigkeit der Stromintensität von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter findet also in allen denjenigen Fällen keine Anwendung, wo die gegebenen elektromotorischen Kräfte sich über die ganze geschlossene Kette erstrecken und in allen Theilen den Widerständen proportional wirken. Nur bei ungleichmässiger Wirksamkeit der gegebenen elektromotorischen Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette tritt eine Vertheilung freier Elektricität ein, und das Factum, dass ein in allen Theilen der Kette gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommt, beweist dann, dass diese Vertheilung der freien Elektricität im Leiter die Wirkung habe, alle Ungleichheiten in der ursprünglichen Wirkungsweise der elektromotorischen Kräfte auszugleichen. Wird nun aber diese Ausgleichung durch das Factum der Existenz eines beharrlichen Stroms als bewiesen betrachtet, so bleibt noch übrig: erstens nachzuweisen, wie eine solche Vertheilung

nach dem elektrischen Grundgesetze möglich ist und wie sie beschaffen sein müsse, zweitens, wie sie entstehe und erhalten werde.

29.

Nachweisung der Möglichkeit einer Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wodurch die Ungleichheiten der Wirksamkeit gegebener elektromotorischer Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände ausgeglichen werden.

Jedes Theilchen freier (positiver oder negativer) Elektricität, welches sich an der Oberfläche eines Leiters befindet, übt elektromotorische Kräfte auf alle Theile des Leiters aus, welche die gegebenen elektromotorischen Kräfte der Kette an einigen Stellen schwächen, an andern verstärken, und es fragt sich daher, ob eine solche Vertheilung freier Elektricität auf der ganzen Oberfläche des Leiters möglich sei, durch welche die elektromotorische Kraft überall, wo sie zu schwach ist, verstärkt, wo sie zu stark ist, geschwächt, und auf diese Weise eine Ausgleichung der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände zu Stande gebracht werde, welche die Bedingung eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms ist. Diese Frage muss, wenn vor der Hand von dem Einflusse der relativen Bewegungen der elektrischen Theilchen gegen einander abstrahiert wird, aus dem Grundgesetze der Elektrostatik entschieden werden, wodurch die von der Elektricität bei jeder beliebigen Vertheilung an der Oberfläche auf alle Punkte im Innern des Leiters ausgeübten Kräfte bestimmt sind.

Poisson hat bekanntlich aus dem Grundgesetze der Elektrostatik folgendes Theorem bewiesen:

Wenn auf einen Leiter von beliebiger Gestalt von aussen beliebige elektrische Kräfte wirken, so ist an der Oberfläche des Leiters immer eine solche Vertheilung freier Elektricität möglich — aber nur eine einzige — bei welcher die elektrischen Kräfte, welche von dieser vertheilten freien Elektricität herrühren, den von aussen her wirkenden elektrischen Kräften in allen Punkten im Innern des Leiters zugleich das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich nun zunächst einen Leiter von cylindrischer Form und in der Richtung seiner Axe in grosser Entfernung eine concentrirte

Masse freien (positiven oder negativen) elektrischen Fluidums, welche auf alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele Kräfte ausübt; so folgt aus obigem Lehrsatz die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Cylinders, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele elektromotorische Kräfte resultieren, nämlich diejenigen Kräfte, welche den von der fernen Masse vor ihrem Wegfall ausgeübten Kräften das Gleichgewicht gehalten hatten.

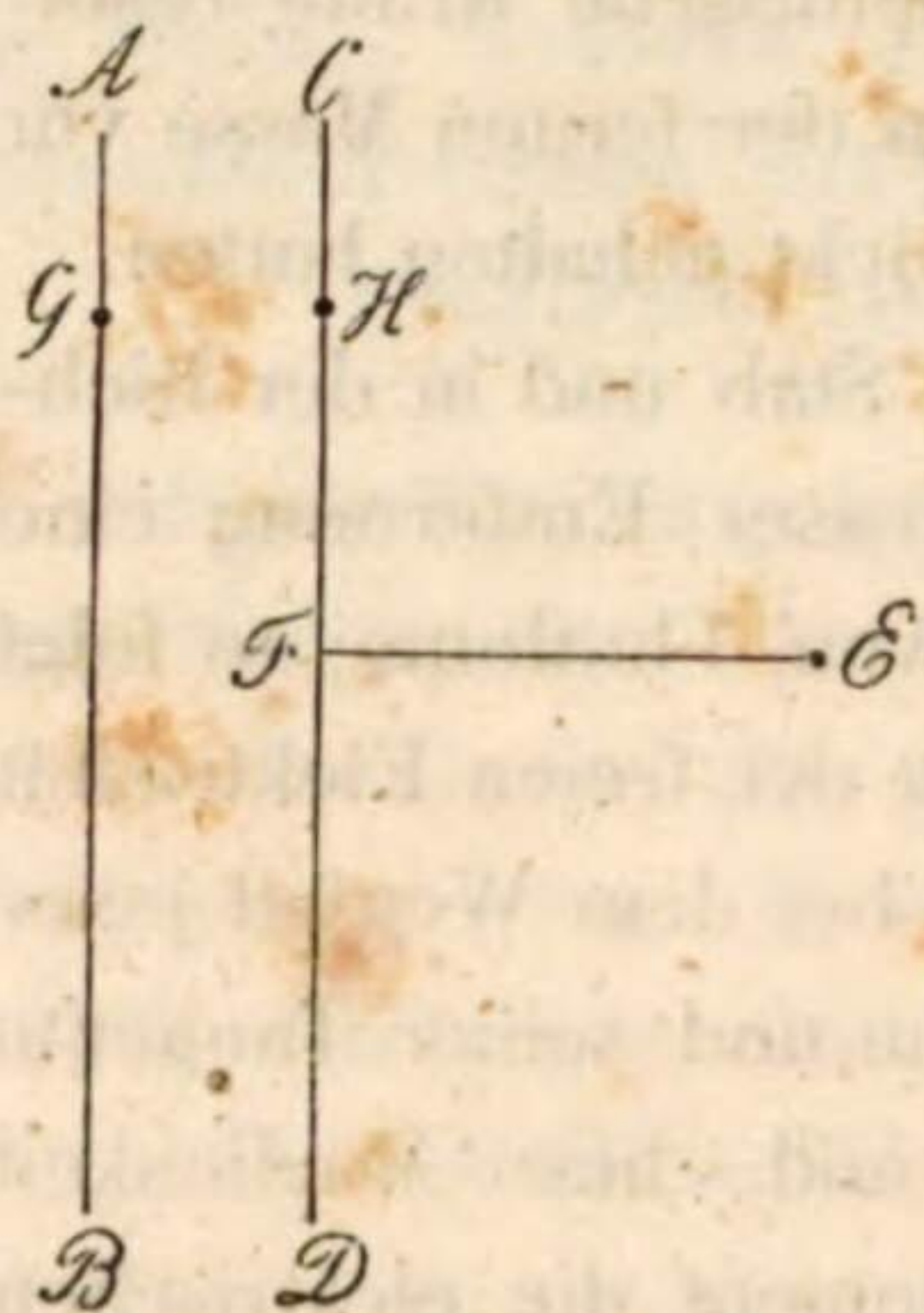
Denkt man sich dagegen einen gebogenen Stab und in der Richtung der Tangente eines seiner Elemente in grosser Entfernung eine concentrirte Masse freien (positiven oder negativen) Fluidums; so folgt eben so die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche dieses Elements, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Elements gleiche und seiner Tangente parallele elektromotorische Kräfte resultieren, und diese Möglichkeit bleibt auch dann, wenn auf das betrachtete Element die elektrischen Ladungen aller andern Elemente des gebogenen Stabes wirken, wie auch diese Ladungen beschaffen sein mögen, nur dass alsdann die Vertheilungsweise der freien Elektricität an der Oberfläche des betrachteten Elements von der Ladung des übrigen Stabs abhängig ist.

Diese Betrachtung lässt sich nun auf alle Elemente des gebogenen Stabs anwenden, so dass für alle Elemente gleiche und ihren Tangenten parallele elektromotorische Kräfte resultieren. Die Ladungen aller einzelnen Elemente werden dadurch von der Ladung des ganzen Stabs abhängig gemacht, und die Ladung des ganzen Stabs muss endlich wiederum der Summe der Ladungen aller Elemente gleich gesetzt werden.

Eine auf solche Weise gewonnene Bestimmung der Ladung des ganzen gebogenen Stabs wird nun gelten, der Stab möge nur einen kleineren oder einen grösseren Theil von einem Kreise bilden. Die Ladungen in den Berührungsflächen je zweier an einander grenzender Elemente müssen sich neutralisieren, so dass die Vertheilung der freien Elektricität auf die Oberfläche des Stabs beschränkt bleibt, zu der aber wesentlich die Anfangsfläche und Endfläche des Stabs gerechnet werden müssen, welche daher nicht zusammenfallen dürfen.

Die Nothwendigkeit, Anfang und Ende des Stabs geschieden zu erhalten, wenn die an der Oberfläche vertheilte freie Elektricität in

allen Elementen des Stabs gleiche elektromotorische Kräfte nach tangentialer Richtung ausüben soll, folgt daraus, dass die Ladungen am Anfange und am Ende des Stabs, bei gegenseitiger Annäherung, keinem bestimmten Grenzwerthe sich nähern, sondern ins Unendliche wachsen müssten; wie man sich durch folgende Betrachtung überzeugen kann.



Es stelle AB die Anfangsfläche, CD die Endfläche des Stabs dar; der sehr kleine Abstand beider Flächen von einander heiße δ . Es darf angenommen werden, dass bei einer Verkleinerung von δ die Vertheilung der freien Elektrizität auf der ganzen Staboberfläche mit Ausnahme von AB und CD nahe unverändert bleibt, woraus folgt, dass die für einen Punkt E des Stabs resultierende elektromotorische Kraft als unverändert angesehen werden kann, wenn nur die aus den Ladungen der beiden Flächen AB und CD für E resultierende elektromotorische Kraft gleich geblieben ist. G und H seien zwei gleiche, einander gegenüberliegende Elemente der Flächen AB und CD . Die Ladung des Elements G werde mit $-e$, die Ladung des Elements H mit $+e$ bezeichnet. Der Abstand FH , senkrecht auf die Richtung der für E resultierenden elektromotorischen Kraft, heiße β ; der Abstand FE heiße α . Alsdann ergibt sich die von H auf E nach der tangentialen Richtung EF wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{+ae}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

die von G auf E nach der nämlichen Richtung wirkende Kraft

$$= \frac{-(\alpha + \delta)e}{[(\alpha + \delta)^2 + \beta\beta]^{\frac{3}{2}}}$$

folglich die Summe beider Kräfte, wenn δ gegen α sehr klein ist,

$$= \frac{2\alpha\alpha - \beta\beta}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta e.$$

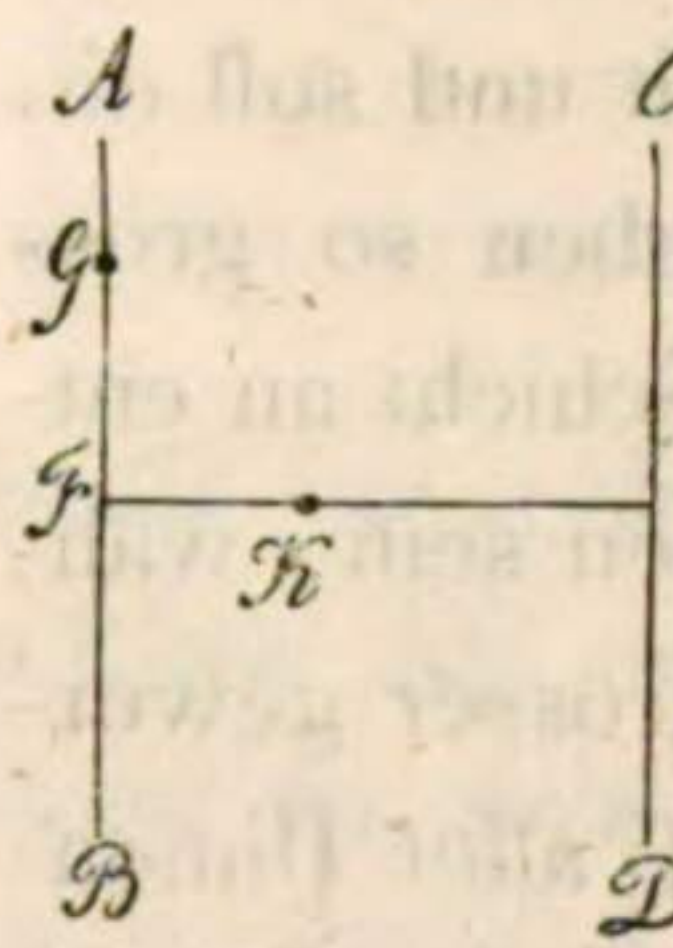
Hieraus folgt also, dass die für E resultierende elektromotorische Kraft bei der Verkleinerung von δ unverändert bleibt, wenn das Product δe gleichen Werth behält. Für verschwindende Werthe von δ müsste also die Ladung e ins Unendliche wachsen, was zu beweisen war.

Zugleich leuchtet daraus ein, dass, wenn die im ganzen Stabe gleiche elektromotorische Kraft wachsen oder abnehmen soll, auch der Werth des Products δe sich proportional ändern müsse.

Bezeichnet endlich K einen zwischen den Flächen AB und CD gelegenen Punkt, so leuchtet ein, dass die Ladungen der Flächen AB und CD auf K eine elektromotorische Kraft nach entgegengesetzter Richtung wie auf E ausüben. Soll daher ein geschlossener Kreis gebildet werden, in welchem überall gleiche elektromotorische Kräfte in gleichem Sinne wirken, was nothwendig ist, wenn ein gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommen soll, so muss K der Sitz einer von der Vertheilung der freien Elektricität an der Staboberfläche unabhängigen elektromotorischen Kraft sein, welches z. B. der Fall ist, wenn Kupfer und Zink im Punkte K einander berühren. Auch lässt sich nachweisen, dass die gegebene elektromotorische Kraft in allen Punkten K der Linie δ , welche die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen verbindet, unter sonst gleichen Verhältnissen dem Produkte δe proportional sein müsse, und dass also dieses Produkt als ein Maass der gegebenen elektromotorischen Kraft betrachtet werden dürfe. *)

Aus diesen allgemeinen Betrachtungen lassen sich nun folgende

*) Es stellen AB und CD die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen dar, deren Abstand $= \delta$ ist. G sei ein Element der Fläche AB , dessen Ladung mit e bezeichnet wird. Der Abstand FG , senkrecht auf die Richtung der für K resultierenden elektromotorischen Kraft, werde mit β , der Abstand FK mit α bezeichnet. Dann ergibt sich die von G auf K nach der Richtung FK wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik



$$= \frac{e\alpha}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich für alle Punkte K von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \delta$

$$= e \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}} \right).$$

Für alle Flächenelemente, welche in gleicher Entfernung β von F liegen, erhält man hiernach durch Multiplication mit $2\pi\beta$

$$2\pi e \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}} \right);$$

endlich für alle Flächenelemente von $\beta = 0$ bis $\beta = b$

$$2\pi e \left(\delta + b - \sqrt{(bb + \delta\delta)} \right)$$

oder, weil δ gegen b sehr klein ist,

$$2\pi e\delta.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich für die von der Fläche CD ausgeübte Kraft, und es ergibt sich folglich die Summe beider Kräfte $= 4\pi e\delta$, d. h. proportional dem Producte δe .

Resultate ziehen, welche eine Vergleichung mit den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette gestatten.

1. Aus obiger Betrachtung folgt, dass in einem geschlossenen Ringe durch blosse Vertheilung der freien Elektricität an seiner Oberfläche kein Strom möglich ist, sondern dass wenigstens in einem Querschnitte dieses Ringes elektromotorische Kräfte, z. B. durch die Berührung von Kupfer mit Zink, gegeben sein müssen, wenn durch Vermittelung einer gewissen Vertheilung der freien Elektricität an der Ringoberfläche ein gleichförmiger und beharrlicher Strom im ganzen Ringe zu Stande kommen soll.

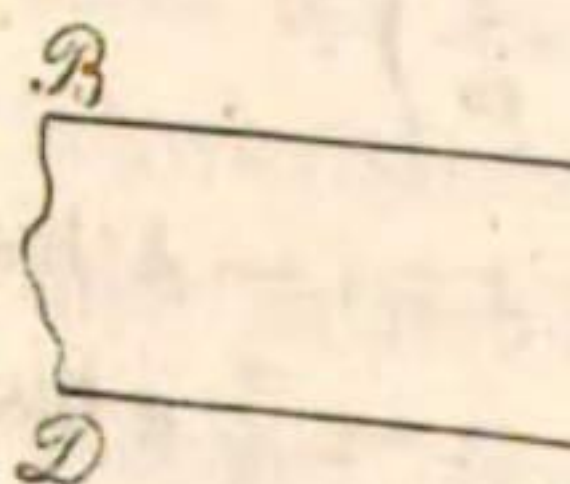
2. Wenn in einer bestimmten Kette der Strom verdoppelt werden soll, so muss die Menge der freien Elektricität auf der ganzen Oberfläche verdoppelt werden; folglich muss auch eine Verdoppelung des Factors e im Producte δe stattfinden, d. h. eine Verdoppelung der damit proportionalen elektromotorischen Kraft. Einer Verdoppelung der elektromotorischen Kraft entspricht also eine Verdoppelung der Stromintensität in der nämlichen Kette.

3. Werden alle Dimensionen einer Kette verdoppelt und soll dabei die elektromotorische Kraft in allen Punkten noch eben so gross wie vorher bleiben, so muss die Dicke der elektrischen Schicht an entsprechenden Stellen der Oberfläche unverändert geblieben sein, während die davon bedeckte Stelle der Oberfläche 4 Mal grösser geworden ist. Zugleich ergiebt das proportionale Wachsthum aller Dimensionen, dass auch der Abstand δ in dem Producte δe verdoppelt gemacht werden muss, wonach also, da e unverändert geblieben ist, das Product δe und die damit proportionale elektromotorische Kraft verdoppelt sein muss. Hieraus folgt, dass eine doppelte elektromotorische Kraft erfordert werde, um in einer Kette von doppelter Länge und vierfachem Querschnitte eine eben so starke elektrische Bewegung in allen Punkten hervorzubringen, wie in einer Kette von einfacher Länge und einfachem Querschnitte. Eine solche in allen Punkten gleich starke elektrische Bewegung giebt aber bei vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität. Die doppelte elektromotorische Kraft bringt also in einer Kette von doppelter Länge und von vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität hervor, was nach den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette auch wirklich der Fall ist.

Eine vollständige
fordert eine nähere
an der Oberfläche

Ueber das Gesetz
fläche des L

Bei einem
der freien Ele
in derjenigen L
leuchtet dies in
welche in gröss
welchen die vo
Kraft bestimmt v
für denjenigen T
nächst liegt.



BCDE ausgeübt
zeichne den un
Dicke der Schicht
ringer Abstand v
 x bezeichnet we

und die elektro
chenelements 2

woraus die Cor

Der Integralwe
hiernach

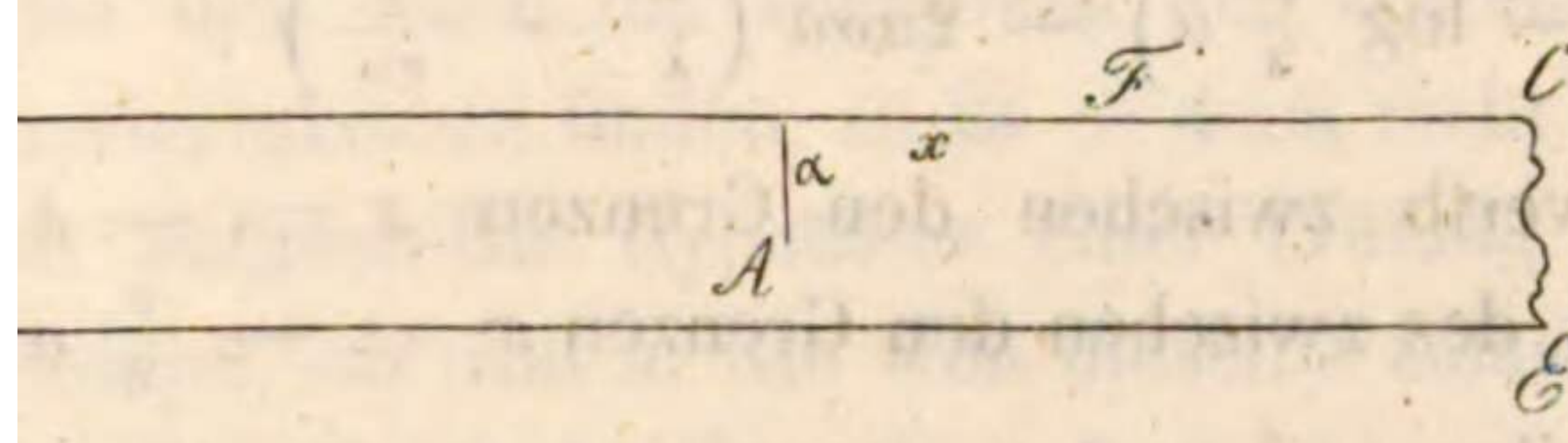
$$2\pi ab \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{ax}{(aa^2 - x^2)^{3/2}} dx$$

Eine vollständige Entwicklung der Gesetze der galvanischen Kette
 ert eine nähere Bestimmung der Vertheilung der freien Elektricität
 der Oberfläche der Kette.

30.

Das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Ober-
 che des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms.

Bei einem linearen Leiter ist es gestattet, für die Vertheilung
 freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben
 rjenigen Linie, welche die Axe des Leiters bildet, zu setzen. Es
 tet dies in Beziehung auf alle Theile des Leiters von selbst ein,
 he in grösserer Entfernung von demjenigen Punkte liegen, für
 hen die von jener freien Elektricität ausgeübte elektromotorische
 bestimmt werden soll, und es bleibt daher nur übrig, den Beweis
 denjenigen Theil des Leiters zu führen, welcher jenem Punkte zu-
 st liegt.



Es sei A derjenige
 Punkt, für welchen die
 von der freien Elektri-
 cität des Leiterelements

DE ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll; α be-
 ohne den unendlich kleinen Halbmesser des Leitungsdrahtes. Die
 ke der Schicht der freien Elektricität in dem Punkte F, dessen ge-
 ger Abstand von dem durch A gehenden Querschnitt des Leiters mit
 ezeichnet werde, kann dargestellt werden durch

$$a + bx$$

l die elektromotorische Kraft welche die freie Elektricität des Flä-
 nelements $2\pi\alpha dx$ bei F auf den Punkt A ausübt, durch

$$\frac{2\pi\alpha (a + bx) dx}{aa + xx}$$

raus die Componente dieser Kraft nach der Richtung der Axe folgt,

$$= \frac{2\pi\alpha (a + bx) x dx}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}}$$

r Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ ist
 nach

$$2\pi\alpha b \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{x dx}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\alpha b \left(\log \frac{\sqrt{(\lambda\lambda + aa)} + \lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + aa)} - \lambda} - \frac{2\lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + aa)}} \right)$$

oder, weil α gegen λ sehr klein ist,

$$= 4\pi ab \cdot \log \frac{2\lambda}{e\alpha} = 4\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha)$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Wäre nun dieselbe freie Elektrizität, statt auf der Oberfläche des Leiters vertheilt, in seiner Axe concentrirt, so würde von dem Axenelemente, in welchem die freie Elektrizität $2\pi\alpha(a+x)dx$ concentrirt wäre, auf A nach der Richtung der Axe eine elektromotorische Kraft wirken, welche dargestellt wird durch

$$\pm \frac{2\pi\alpha(a+bx)dx}{xx}$$

je nachdem x einen positiven oder negativen Werth hat. Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = -\frac{e}{2}\alpha$ ist

$$= 2\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha) + 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right)$$

zwischen den Grenzen $x = +\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\lambda$

$$= 2\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha) - 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right);$$

folglich ist der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$, mit Ausschluss des zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ fallenden Theils,

$$= 4\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha)$$

woraus hervorgeht, dass es gestattet ist, für die Vertheilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in der Axe des Leiters zu substituieren, wenn man in dem Integralwerthe der elektromotorischen Kraft denjenigen Theil ausschliesst, welcher zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ liegt.

Hat z. B. der lineare Leiter die Gestalt eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, und bezeichnet A den Anfangspunkt eines Bogens $AB = r\varphi$, welcher der Sitz der gegebenen elektromotorischen Kraft der Kette ist; so sei

$$f\varphi \cdot d\varphi$$

die freie Elektrizität des Bogenelements $rd\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$. Der Werth des Potentials dieser elektrischen Masse im Punkte C am Ende des Bogens $AC = r\psi$ ist dann

$$= \frac{f\varphi \cdot d\varphi}{2r \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

gleich der Werth des Potentials der elektrischen Masse des ganzen Leiters im Punkte C

$$\frac{1}{2r} \int \frac{f\varphi \cdot d\varphi}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = F\psi$$

die Integration von $\varphi = \psi + \frac{e}{2} \frac{a}{r}$ bis $\varphi = 2\pi + \psi - \frac{e}{2} \frac{a}{r}$ zu decken ist. Hieraus ergibt sich die auf den Punkt C ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= \frac{d \cdot F\psi}{rd\psi}.$$

Da diese elektromotorische Kraft in allen Theilen des Leiters gleich ist, d. h. soll $\frac{d \cdot F\psi}{rd\psi}$ einen constanten Werth c haben, so erhält man

$$F\psi = c\psi + \text{const.}$$

Bei symmetrischer Vertheilung der freien positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $F\pi = c\pi + \text{const.} = 0$ ist,

$$F\psi = c(\psi - \pi).$$

Nun auch die Auffindung der allgemeinen Form der Function $f\varphi$ ergründen finden, so ist es doch nicht schwer, die von Ohm daraufgestellte Hypothese einer Prüfung zu unterwerfen und zu entscheiden, ob und in wie weit dieselbe zulässig sei.

Die Ohm'sche Hypothese besteht wesentlich darin, dass der Werth $f\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ proportional mit φ wachse und dass also im Fall der symmetrischen Vertheilung der positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $f(0) = -f(2\pi)$ ist,

$$f\varphi = a(\varphi - \pi).$$

Darausgesetzt, lässt sich der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Leiters in demjenigen Punkte, für welchen es bestimmt ist, folgendermassen bestimmen.

Sei der Anfangspunkt des Bogens $r\varphi$; $AB = BD = r\psi$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von A bis D lassen sich paarweise nach ihrem Abstand von B ordnen. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi - \chi$ seinen Abstand von $B = 2r \sin \frac{1}{2} \chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von B . Die diesen beiden Elementen gehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi - \pi) d\chi \text{ und } a(\psi + \chi - \pi) d\chi$$

Der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi - \pi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} \chi} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi - \pi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} \chi},$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a(\psi - \pi) d\chi}{r \sin \frac{1}{2} \chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektrizität des ganzen Bogens **AD** im Punkte **B** ergibt sich hieraus

$$\frac{a(\psi - \pi)}{r} \int_{\frac{ea}{2r}}^{\psi} \frac{d\chi}{\sin \frac{1}{2} \chi} = \frac{2a(\psi - \pi)}{r} \cdot \left(\log \tan \frac{1}{4} \psi - \log \tan \frac{ea}{8r} \right).$$

Der Punkt **C** des Kreises liege dem Punkte **B** diametral gegenüber, folglich der Bogen $ABC = r(\psi + \pi)$. Alle Elemente des Bogens **rφ** von **D** über **C** nach **A** lassen sich ebenfalls paarweise ordnen nach ihrem Abstände von **C**. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi + \pi - \chi$ gehört, dessen Abstand von **C** $= 2r \sin \frac{1}{2} \chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \pi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von **C**. Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi) d\chi \text{ und } a(\psi + \chi) d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte **B**

$$\frac{a(\psi - \chi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} (\pi - \chi)} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} (\pi + \chi)}$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a\psi}{r} \cdot \frac{d\chi}{\cos \frac{1}{2} \chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektrizität des ganzen Bogens **DCA** im Punkte **B** ergibt sich hieraus

$$\frac{a\psi}{r} \int_0^{\pi - \psi} \frac{d\chi}{\cos \frac{1}{2} \chi} = - \frac{2a\psi}{r} \log \tan \frac{1}{4} \psi$$

der Werth des Potentials der freien Elektrizität des ganzen Kreises also

$$= - \frac{2a\psi}{r} \log \tan \frac{ea}{8r} - \frac{2a\pi}{r} \left(\log \tan \frac{1}{4} \psi - \log \tan \frac{ea}{8r} \right).$$

Hieraus ergibt sich die auf den Punkt **B** ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= - \frac{2a}{rr} \log \tan \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi}$$

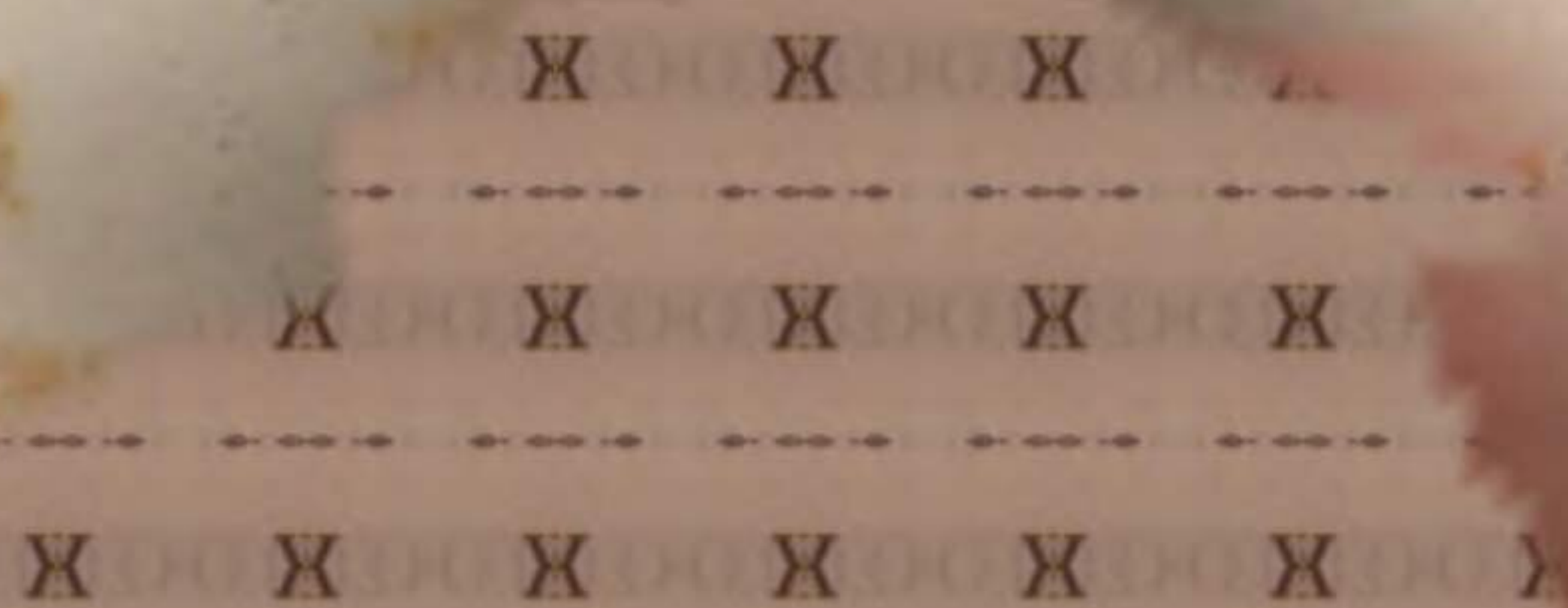
oder

$$= - \frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi}.$$

Für diejenige
ergibt sich
aber der W
tiefer sinkt
woraus ab
der freien
weise zu
So
rischen
der Ket
aufstell
these h
dem S
freien
Leiter
könne
gehö
lung
citä
gar
sch
wi
Qu
ti
m
f

diejenigen Werthe von ψ , welche von π wenig verschieden sind, bleibt sich hiernach die elektromotorische Kraft nahe gleich; je mehr der Werth von ψ dem Werthe von 0 oder 2π nahe kommt, desto sinkt die elektromotorische Kraft unter jenem Grenzwerthe herab, aus also folgt, dass die Ohm'sche Hypothese über die Vertheilung freien Elektricität nur für den mittlern Theil der Kette näherungsweise zulässig ist.

So wie nun nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette kleiner ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwert, so lässt sich auch leicht eine Hypothese stellen, nach welcher er grösser sein würde. Die Ohm'sche Hypothese bedarf nämlich nothwendig einer Ergänzung, wenn sie nicht mit dem Satze in Widerspruch stehen soll, dass aus der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche eines Leiters eine im Innern des Leiters überall gleiche elektromotorische Kraft nur dann resultieren könne, wenn zwei Querschnittsflächen des Leiters zu jener Oberfläche gehören (s. S. 275). Denn hiernach muss in unserer linearen Darstellung alle in diesen beiden Querschnittsflächen befindliche freie Elektricität in zwei Punkten concentrirt gedacht werden, während in der übrigen Kette nur die in der Begrenzungslinie eines Querschnitts befindliche Elektricität in einem Punkte concentrirt gedacht wird. Es ergiebt sich daraus, dass wenigstens in den jene beiden Querschnitte darstellenden Endpunkten eine von Ohm nicht berücksichtigte Concentration von freier Elektricität stattfinden müsse. Bezeichnet man diese mit $\pm \varepsilon$, wo das obere Vorzeichen für den einen, das untere für den andern Punkt gilt, und bezeichnet δ den kleinen Abstand beider Punkte von einander, so lässt sich die elektromotorische Kraft, welche durch für jeden Punkt der Kette noch hinzukommt, nach demselben Gesetze bestimmen, welches Gauss für die Wirkung eines Magnets in der Ferne gegeben hat. Siehe «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 33. 34. Ist nämlich ACA' der kreisförmige Leiter und in A die Contactstelle, und soll die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche durch die freie Elektricität $\pm \varepsilon$ zu beiden Seiten von A im Punkte C des Leiters hinzukommt; so ziehe man in A die Tangente und verlängere sie, bis sie in B die verlängerte Gerade $A'C$ schneidet, wo A' denjenigen Punkt des Kreises bezeichnet, welcher dem Punkte A diametral gegenüber



liegt; ferner mache man $AD = \frac{1}{3} AB$ und ziehe CD ; so ist CD die Richtung der elektromotorischen Kraft, welche $\pm \varepsilon$ in C ausübt, und die Grösse dieser Kraft wird dargestellt durch

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{AC^3}.$$

Zieht man endlich die Tangente des Kreises in C und fällt darauf das Perpendikel DE ; so ergibt sich die Componente nach der Richtung der Kreistangente in C , d. i. die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{AC^3} = \frac{CE}{AD} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{AC^3}.$$

Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises mit r und den Kreisbogen AC mit ψ , so findet man dafür den Ausdruck

$$\frac{1 + \cos \frac{1}{2} \psi^2}{\sin \frac{1}{2} \psi^3} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{8r^3}.$$

Fügt man nun diese elektromotorische Kraft der nach der Ohm'schen Hypothese gefundenen noch hinzu, so erhält man

$$\frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi} + \frac{1 + \cos \frac{1}{2} \psi^2}{\sin \frac{1}{2} \psi^3} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{8r^3}.$$

Auch dieser Werth ist nahe constant für solche Werthe von ψ , welche von π wenig verschieden sind, wie man ersieht, wenn man den Differentialquotienten entwickelt, nämlich

$$\frac{\cos \frac{1}{2} \psi}{2rr \sin \frac{1}{2} \psi^2} \left(a\pi - \frac{\delta \varepsilon}{4r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 + \cos \frac{1}{2} \psi^2}{\sin \frac{1}{2} \psi^2} \right) \right)$$

welcher für $\psi = \pi$ Null ist. Ausserdem kann aber der Werth von $\delta \varepsilon$ so bestimmt werden, dass auch der zweite und dritte Differentialquotient für $\psi = \pi$ Null ist, welches der Fall ist, wenn

$$\delta \varepsilon = \frac{8}{5} a\pi r$$

ist. Substituiert man diesen Werth von $\delta \varepsilon$ in dem Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man

$$\frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} + \frac{2a\pi}{5rr \sin \frac{1}{2} \psi^3} (3 \cos \frac{1}{2} \psi^2 - 2)$$

dessen Differentialquotient

$$= -\frac{3}{5} \frac{a\pi}{rr} \frac{\cos \frac{1}{2} \psi^3}{\sin \frac{1}{2} \psi^3}$$

für $\psi = \pi$ Null ist, weil er $\cos \frac{1}{2} \pi = 0$ zum Factor hat. Auch sieht man, dass die beiden folgenden Differentialquotienten für $\psi = \pi$ Null werden, weil sie ebenfalls den Factor $\cos \frac{1}{2} \pi = 0$ haben.

Man ersieht hieraus, dass nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen anderen Theilen der Kette grösser ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwert, statt er nach der

n'schen Hypothese kleiner war. Die richtige Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität, aus welcher sich eine überall gleiche elektromotorische Kraft ergeben soll, ist also zwischen den von den obigen Hypothesen gegebenen Grenzen eingeschlossen, was viel heisst als: die elektrische Ladung der Kette wächst von dem Differenzpunkte zu dem Kontaktpunkte nicht gleichförmig, sondern allmählich beschleunigt. Die daraus hervorgehende, überall gleiche elektromotorische Kraft wird dann muthmasslich zwischen den durch die beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzwerten liegen, nämlich

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right) \text{ und } \frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right).$$

Der Factor a bezieht sich dabei auf das Gefälle der elektrischen Ladung in der Mitte der Kette, wenn man nach Ohm unter Gefälle den Differentialquotienten der Ladung $f\varphi$ in Beziehung auf den Bogen φ versteht.

31.

Die Vertheilung der freien Elektricität in einem linearen Leiter, durch welchen ein constanter Strom geht, und die Grösse der von dieser Vertheilung abhängigen elektromotorischen Kraft kann in jedem einzelnen Falle genähert auf folgende Weise bestimmt werden. Der Einfachheit wegen soll auch hier für den Leiter die Form eines Kreises angenommen werden und für einen einzigen Punkt desselben eine elektromotorische Kraft $= a$ gegeben sein.

Theilt man den Kreis durch die Punkte $A, (A^1), B, (A_1)$ in vier gleiche Theile und ist B der Punkt, für welchen die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist; so lässt sich leicht eine Vertheilung freier Elektricität in den beiden Punkten (A^1) und (A_1) angeben, durch welche die elektromotorischen Kräfte in den beiden Punkten A und B ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $+e$ die freie Elektricität in (A^1) , $-e$ in (A_1) und r den Halbmesser des Kreises, so ist $2r \sin \frac{1}{4} \pi = r\sqrt{2}$ der Abstand der Punkte A und B von (A^1) oder (A_1) . Hieraus ergiebt sich nach dem Grundgesetze der Elektrostatik die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - \frac{2e}{4rr \sin \frac{1}{4} \pi^2} \cdot \cos \frac{1}{4} \pi = a - \frac{e}{rr} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{in } A = + \frac{2e}{4rr \sin \frac{1}{4} \pi^2} \cdot \cos \frac{1}{4} \pi = + \frac{e}{rr} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

folglich für die verlangte Ausgleichung

$$a = \frac{e}{rr} \cdot \sqrt{2}$$

oder

$$\pm e = \pm arr \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, wenn der Kreis durch die Punkte $A, (A^1), A^1, (A^2), \text{etc.}$ in $4n$ gleiche Theile getheilt wird und in dem A diametral gegenüberliegenden Punkte B die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist, eine solche Vertheilung freier Elektricität in $2n$ Punkten $(A^1), (A^2), \text{etc.}$, durch welche die elektromotorischen Kräfte in den $2n$ Punkten $A, A^1, \text{etc.}$ ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $\pm e_1$ die freie Elektricität in $(A^1), (A_1), \pm e_2$ in $(A^2), (A_2), \text{etc.}$, und r den Halbmesser des Kreises, und setzt man $\frac{\cos \frac{(2m-1)\pi}{4n}}{4rr [\sin \frac{(2m-1)\pi}{4n}]^2} = p_m$, so findet man die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - 2p_n \cdot e_1 - 2p_{n-1} \cdot e_2 - \dots - 2p_1 \cdot e_n$$

$$\text{in } A = 2p_1 e_1 + 2p_2 e_2 + \dots + 2p_n e_n$$

in A^m oder in A_m

$$= -p_m e_1 - p_{m-1} e_2 - \dots - p_1 e_m + p_1 e_{m+1} + \dots + p_{n-m} e_n \\ + p_{m+1} e_1 + p_{m+2} e_2 + \dots + p_n e_{n-m} - p_n e_{n-m+1} - \dots - p_{n-m+1} e_n$$

worin für m alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ gesetzt werden können. Durch Gleichsetzung aller dieser $(n+1)$ Werthe erhält man n Gleichungen zur Bestimmung der n unbekannten Grössen $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Ferner ergibt sich der Mittelwerth der beiden ersten von obigen $(n+1)$ gleichgesetzten elektromotorischen Kräften k

$$k = \frac{1}{2} a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \dots$$

und die Summe aller zusammen

$$(n+1) k = a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \dots$$

folglich

$$(n+1) k - a = k - \frac{1}{2} a$$

oder

$$a = 2nk.$$

Z. B. für $n = 2$ ergibt sich

$$e_1 = 0,01567 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,05833 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{4} a$$

= 4 :

$$e_1 = 0,001537 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,004744 \cdot 4rra$$

$$e_3 = 0,008570 \cdot 4rra$$

$$e_4 = 0,015922 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{8} a$$

= 8 :

$$e_1 = 0,0001582 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,0004771 \cdot 4rra$$

$$e_3 = 0,0008047 \cdot 4rra$$

$$e_4 = 0,0011495 \cdot 4rra$$

$$e_5 = 0,0015271 \cdot 4rra$$

$$e_6 = 0,0019726 \cdot 4rra$$

$$e_7 = 0,0025951 \cdot 4rra$$

$$e_8 = 0,0041187 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{16} a.$$

größer die Zahl n ist, desto mehr nähert sich der Werth von e_1 den
then

$$\frac{1}{3} e_2, \frac{1}{5} e_3, \dots$$

theilt man nun die Massen $e_1, e_2, \dots, e_m$, für welche die Abweichun-
von den Massen $e_1, 3e_1, \dots, (2m-1)e_1$ als unmerklich vernachläss-
werden dürfen, auf die m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$, in deren Mitte sie lie-
t, dem Abstände x vom Punkte A proportional, so ist, wenn b einen
stanten Factor bezeichnet,

$$b \int_0^{\frac{m}{n}\pi r} x dx = \frac{1}{2} b \cdot \frac{nm\pi r^2}{n} = e_1 + e_2 + \dots + e_m = mme_1,$$

gleich

$$b = \frac{2nn}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1}{rr}$$

in war die elektromotorische Kraft der in der Mitte der m Kreis-
gen $\frac{\pi r}{n}$ concentrirten Massen $e_1, e_2, \dots, e_m$ im Punkte A , wenn der
reisbogen $\frac{m}{n} \pi r$ so klein ist, dass seine Abweichung von der geraden
nie als unmerklich betrachtet werden darf,

on e_1

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot e_1$$

on e_2

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{9} e_2 = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{3} e_1$$

on e_m

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2} e_m = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot e_1$$

also die ganze von diesen m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) e_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) b.$$

Die elektromotorische Kraft dagegen, welche von der nämlichen, nach dem angegebenen Gesetze stetig auf den ganzen Bogen $\frac{m}{n} \pi r$ vertheilten Masse im Punkte A ausgeübt wird, wenn diese lineare Vertheilung nach Art. 30 die Stelle der wirklichen Vertheilung auf der Oberfläche eines dünnen Drahts von dem Halbmesser α vertritt, wird gefunden

$$b \int_{\frac{e\alpha}{2}}^{\frac{m}{n} \pi r} \frac{dx}{x} = b \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}.$$

Diese beiden Ausdrücke für die von den m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft sind gleich, wenn α einen solchen Werth erhält, dass

$$2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) = \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}$$

d. i.

$$e\alpha = \frac{2m}{n} \pi r e^{-2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right)}$$

ist, worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Je grösser die Zahl n und folglich auch die Zahl m ist, desto geringer ist der Einfluss, welchen es auf den Werth von α hat, ob die Zahl m um einen oder einige Einheiten grösser oder kleiner genommen wird. Denn bezeichnet m eine grössere Zahl und α' den Werth, welchen α erhält, wenn m um 1 vergrössert wird, so lässt sich α' darstellen durch $\frac{2m^2 + 3m + 1}{2m^2 + 3m} \cdot \alpha$, was für grosse Werthe von m nur wenig von α verschieden ist. Für diesen Werth von α können also die in den Mittelpunkten der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrirten Massen freier Elektrizität an die Stelle einer gleich grossen, an der Oberfläche des Leiters stetig vertheilten Masse gesetzt werden; denn für den dem betrachteten Punkte zunächst liegenden Theil der Kette folgt dies aus der eben nachgewiesenen Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, für die ferneren Theile der Kette leuchtet es aber eben so wie Art. 30 von selbst ein.

Für den oben betrachteten Fall, wenn $n = 8$ ist, sieht man leicht, dass m nicht grösser als 2 genommen werden kann; folglich

$$e\alpha = \frac{1}{2} \pi r e^{-\frac{8}{3}} = 0,10945 \cdot r.$$

Werth von α ist nun allerdings, weil so kleine Werthe von n zum Grunde gelegt worden, nicht als genau zu betrachten. Es zeigt sich ausserdem zu gross, als dass die Art. 30 entwickelten Formeln, welche nur für kleine Werthe von α gelten, mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden könnten. Eine genauere Anwendung der Formeln würde fordern, dass n nicht kleiner als 32 wäre, wo, wenn $m = 4$ annähme,

$$e\alpha = \frac{1}{4} \pi r e^{-\frac{352}{405}} = 0,02749 \cdot r$$

würde. Der vorliegende Fall möge daher nur zur Erläuterung dienen, wie auf dem angegebenen Wege, trotz der Ungenauigkeit und des Werthe von α , die Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die daraus resultierende elektromotorische Kraft doch einigermaßen näherungsweise bestimmt werde. Ausser dem Werthe von $e\alpha$

$$e\alpha = 0,10945 \cdot r$$

man nämlich für diesen Fall

$$b = \frac{32}{\pi \pi} \cdot \frac{e_1 + e_2}{rr} = 0,008239 \cdot a$$

die in der ganzen Kette gleiche elektromotorische Kraft

$$k = \frac{1}{16} a.$$

Die Resultate lassen sich nur mit den S. 285 gegebenen Formeln vergleichen, wonach dieselbe elektromotorische Kraft näherungsweise durch folgende beide Ausdrücke dargestellt werden soll, nämlich durch

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right)$$

oder durch

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right)$$

bei zu beachten ist, dass dort das Massenelement der freien Elektricität in dem Bogenelemente $rd\varphi$, welches in einer kleinen Entfernung vom Indifferenzpunkte A sich befindet, durch $a\varphi d\varphi$ ausgedrückt worden ist, während hier dasselbe Massenelement mit $bx dx$ bezeichnet wurde, wo $x = r\varphi$ und $dx = rd\varphi$ ist: es ist also in diesen beiden Formeln $a = brr$ zu setzen. Hiernach ergibt sich nun näherungsweise entweder

$$k = 2b \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right) = 0,04488 \cdot a$$

oder

$$k = 2b \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right) = 0,05006 \cdot a$$

Resultate ziehen, welche eine Vergleichung mit den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette gestatten.

1. Aus obiger Betrachtung folgt, dass in einem geschlossenen Ringe durch blosse Vertheilung der freien Elektricität an seiner Oberfläche kein Strom möglich ist, sondern dass wenigstens in einem Querschnitte dieses Ringes elektromotorische Kräfte, z. B. durch die Berührung von Kupfer mit Zink, gegeben sein müssen, wenn durch Vermittelung einer gewissen Vertheilung der freien Elektricität an der Ringoberfläche ein gleichförmiger und beharrlicher Strom im ganzen Ringe zu Stande kommen soll.

2. Wenn in einer bestimmten Kette der Strom verdoppelt werden soll, so muss die Menge der freien Elektricität auf der ganzen Oberfläche verdoppelt werden; folglich muss auch eine Verdoppelung des Factors e im Producte de stattfinden, d. h. eine Verdoppelung der damit proportionalen elektromotorischen Kraft. Einer Verdoppelung der elektromotorischen Kraft entspricht also eine Verdoppelung der Stromintensität in der nämlichen Kette.

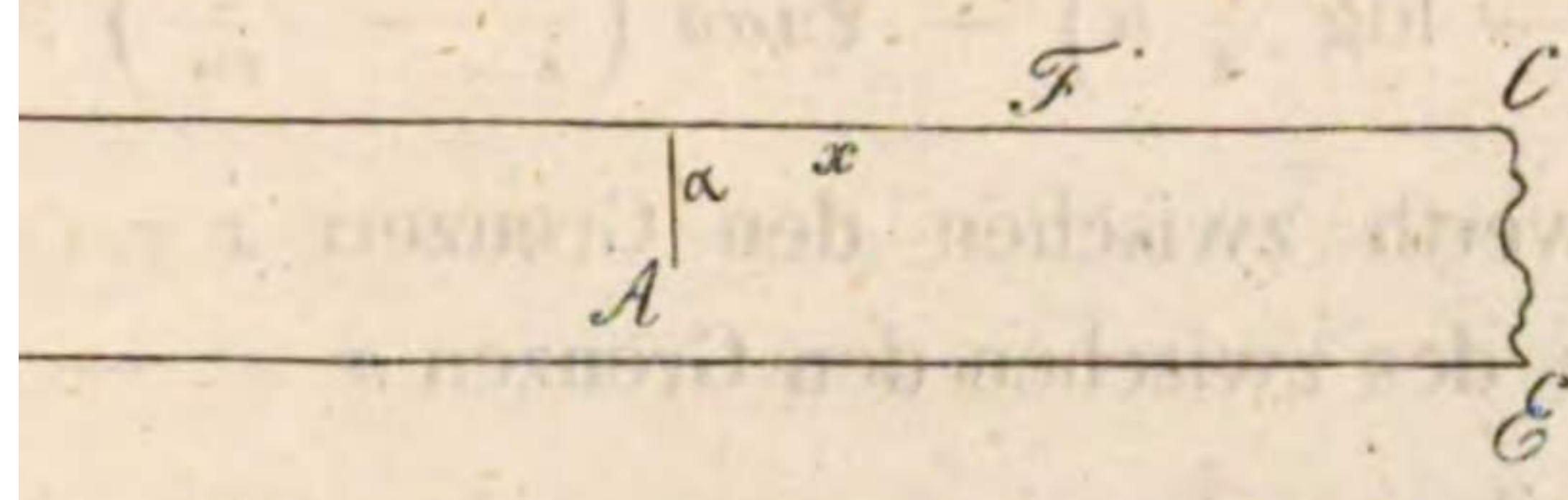
3. Werden alle Dimensionen einer Kette verdoppelt und soll dabei die elektromotorische Kraft in allen Punkten noch eben so gross wie vorher bleiben, so muss die Dicke der elektrischen Schicht an entsprechenden Stellen der Oberfläche unverändert geblieben sein, während die davon bedeckte Stelle der Oberfläche 4 Mal grösser geworden ist. Zugleich ergiebt das proportionale Wachsthum aller Dimensionen, dass auch der Abstand δ in dem Producte de verdoppelt gedacht werden muss, wozu auch e unverändert geblieben ist, das Product de und die damit proportionale elektromotorische Kraft verdoppelt sein muss. Hieraus folgt, dass eine doppelte elektromotorische Kraft erfordert werde, um in einer Kette von doppelter Länge und vierfachem Querschnitte eine eben so starke elektrische Bewegung in allen Punkten hervorzubringen, wie in einer Kette von einfacher Länge und einfachem Querschnitte. Eine solche in allen Punkten gleich starke elektrische Bewegung giebt aber bei vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität. Die doppelte elektromotorische Kraft bringt also in einer Kette von doppelter Länge und von vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität hervor, was nach den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette auch wirklich der Fall ist.

vollständige Entwicklung der Gesetze der galvanischen Kette
e nähere Bestimmung der Vertheilung der freien Elektrizität
fläche der Kette.

30.

**Gesetz der Vertheilung der freien Elektrizität an der Ober-
s Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms.**

dem linearen Leiter ist es gestattet, für die Vertheilung
Elektrizität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben
en Linie, welche die Axe des Leiters bildet, zu setzen. Es
es in Beziehung auf alle Theile des Leiters von selbst ein,
grösserer Entfernung von demjenigen Punkte liegen, für
die von jener freien Elektrizität ausgeübte elektromotorische
immt werden soll, und es bleibt daher nur übrig, den Beweis
nigen Theil des Leiters zu führen, welcher jenem Punkte zu-
egt.



Es sei A derjenige
Punkt, für welchen die
von der freien Elektri-
cität des Leiterelements

ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll; α be-
den unendlich kleinen Halbmesser des Leitungsdrahtes. Die
er Schicht der freien Elektrizität in dem Punkte F, dessen ge-
Abstand von dem durch A gehenden Querschnitt des Leiters mit
chnet werde, kann dargestellt werden durch

$$a + bx$$

e elektromotorische Kraft welche die freie Elektrizität des Flä-
ments $2\pi\alpha dx$ bei F auf den Punkt A ausübt, durch

$$\frac{2\pi\alpha (a + bx) dx}{aa + xx}$$

die Componente dieser Kraft nach der Richtung der Axe folgt,

$$= \frac{2\pi\alpha (a + bx) x dx}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}}$$

Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ ist
ch

$$2\pi\alpha b \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{x dx}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\alpha b \left(\log \frac{\sqrt{(\lambda\lambda + aa)} + \lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + aa)} - \lambda} - \frac{2\lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + aa)}} \right)$$

oder, weil α gegen λ sehr klein ist,

$$= 4\pi\alpha b \cdot \log \frac{2\lambda}{e\alpha} = 4\pi\alpha b (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha)$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Wäre nun dieselbe freie Elektrizität, statt auf der Oberfläche des Leiters vertheilt, in seiner Axe concentrirt, so würde von dem Axenelemente, in welchem die freie Elektrizität $2\pi\alpha(a+x)dx$ concentrirt wäre, auf A nach der Richtung der Axe eine elektromotorische Kraft wirken, welche dargestellt wird durch

$$\pm \frac{2\pi\alpha(a+bx)dx}{xx}$$

je nachdem x einen positiven oder negativen Werth hat. Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = -\frac{e}{2}\alpha$ ist

$$= 2\pi\alpha b (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha) + 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right)$$

zwischen den Grenzen $x = +\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\lambda$

$$= 2\pi\alpha b (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha) - 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right);$$

folglich ist der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$, mit Ausschluss des zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ fallenden Theils,

$$= 4\pi\alpha b (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha)$$

woraus hervorgeht, dass es gestattet ist, für die Vertheilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in der Axe des Leiters zu substituieren, wenn man in dem Integralwerthe der elektromotorischen Kraft denjenigen Theil ausschliesst, welcher zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ liegt.

Hat z. B. der lineare Leiter die Gestalt eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, und bezeichnet A den Anfangspunkt eines Bogens $AB = r\varphi$, welcher der Sitz der gegebenen elektromotorischen Kraft der Kette ist; so sei

$$f\varphi \cdot d\varphi$$

die freie Elektrizität des Bogenelements $rd\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$. Der Werth des Potentials dieser elektrischen Masse im Punkte C am Ende des Bogens $AC = r\psi$ ist dann

$$= \frac{f\varphi \cdot d\varphi}{2r \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

er Werth des Potentials der elektrischen Masse des ganzen
Punkte C

$$\frac{1}{2r} \int \frac{f_{\varphi} \cdot d\varphi}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = F_{\psi}$$

Integration von $\varphi = \psi + \frac{e}{2} \frac{\alpha}{r}$ bis $\varphi = 2\pi + \psi - \frac{e}{2} \frac{\alpha}{r}$ zu
ist. Hieraus ergibt sich die auf den Punkt C ausgeübte
elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten
als in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= \frac{d \cdot F_{\psi}}{rd\psi}.$$

diese elektromotorische Kraft in allen Theilen des Leiters gleich
soll $\frac{d \cdot F_{\psi}}{rd\psi}$ einen constanten Werth c haben, so erhält man

$$F_{\psi} = c\psi + \text{const.}$$

bei symmetrischer Vertheilung der freien positiven und negativen
Elektricität im Leiter, wo $F_{\pi} = c\pi + \text{const.} = 0$ ist,

$$F_{\psi} = c(\psi - \pi).$$

um nun auch die Auffindung der allgemeinen Form der Function f_{φ}
möglichkeiten finden, so ist es doch nicht schwer, die von Ohm dar-
aufgestellte Hypothese einer Prüfung zu unterwerfen und zu ent-
scheiden, ob und in wie weit dieselbe zulässig sei.

Die Ohm'sche Hypothese besteht wesentlich darin, dass der Werth
von f_{φ} von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ proportional mit φ wachse und dass also
im Fall der symmetrischen Vertheilung der positiven und nega-
tiven Elektricität im Leiter, wo $f(0) = -f(2\pi)$ ist,

$$f_{\varphi} = a(\varphi - \pi).$$

vorausgesetzt, lässt sich der Werth des Potentials der freien
Elektricität des ganzen Leiters in demjenigen Punkte, für welchen
 ψ ist, folgendermassen bestimmen.

Sei A der Anfangspunkt des Bogens $r\varphi$; $AB = BD = r\psi$. Alle
Elemente des Bogens $r\varphi$ von A bis D lassen sich paarweise nach ihrem
Abstande von B ordnen. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi - \chi$
gehört, dessen Abstand von $B = 2r \sin \frac{1}{2} \chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \chi$
gehörende Element denselben Abstand von B . Die diesen beiden Ele-
menten zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi - \pi) d\chi \text{ und } a(\psi + \chi - \pi) d\chi$$

der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi - \pi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} \chi} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi - \pi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} \chi},$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a(\psi - \pi) d\chi}{r \sin \frac{1}{2} \chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens AD im Punkte B ergibt sich hieraus

$$\frac{a(\psi - \pi)}{r} \int_{\frac{ea}{2r}}^{\psi} \frac{d\chi}{\sin \frac{1}{2} \chi} = \frac{2a(\psi - \pi)}{r} \cdot \left(\log \tan \frac{1}{4} \psi - \log \tan \frac{ea}{8r} \right).$$

Der Punkt C des Kreises liege dem Punkte B diametral gegenüber, folglich der Bogen $ABC = r(\psi + \pi)$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von D über C nach A lassen sich ebenfalls paarweise ordnen nach ihrem Abstände von C . Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi + \pi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $C = 2r \sin \frac{1}{2} \chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \pi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von C . Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi) d\chi \text{ und } a(\psi + \chi) d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} (\pi - \chi)} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} (\pi + \chi)}$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a\psi}{r} \cdot \frac{d\chi}{\cos \frac{1}{2} \chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens DCA im Punkte B ergibt sich hieraus

$$\frac{a\psi}{r} \int_0^{\pi - \psi} \frac{d\chi}{\cos \frac{1}{2} \chi} = - \frac{2a\psi}{r} \log \tan \frac{1}{4} \psi$$

der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Kreises also

$$= - \frac{2a\psi}{r} \log \tan \frac{ea}{8r} - \frac{2a\pi}{r} \left(\log \tan \frac{1}{4} \psi - \log \tan \frac{ea}{8r} \right).$$

Hieraus ergibt sich die auf den Punkt B ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= - \frac{2a}{rr} \log \tan \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi}$$

oder

$$= \frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi}.$$

diejenigen Werthe von ψ , welche von π wenig verschieden sind, geht sich hiernach die elektromotorische Kraft nahe gleich; je mehr der Werth von ψ dem Werthe von 0 oder 2π nahe kommt, desto sinkt die elektromotorische Kraft unter jenem Grenzwerte herab, aus also folgt, dass die Ohm'sche Hypothese über die Vertheilung freien Elektricität nur für den mittlern Theil der Kette näherungsweise zulässig ist.

So wie nun nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette kleiner ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwert, so lässt sich auch leicht eine Hypothese stellen, nach welcher er grösser sein würde. Die Ohm'sche Hypothese bedarf nämlich nothwendig einer Ergänzung, wenn sie nicht mit dem Satze in Widerspruch stehen soll, dass aus der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche eines Leiters eine im Innern des Leiters überall gleiche elektromotorische Kraft nur dann resultieren könne, wenn zwei Querschnittsflächen des Leiters zu jener Oberfläche gehören (s. S. 275). Denn hiernach muss in unserer linearen Darstellung alle in diesen beiden Querschnittsflächen befindliche freie Elektricität in zwei Punkten concentrirt gedacht werden, während in der übrigen Kette nur die in der Begrenzungslinie eines Querschnitts befindliche Elektricität in einem Punkte concentrirt gedacht wird. Es ergibt sich daraus, dass wenigstens in den jene beiden Querschnitte darstellenden Endpunkten eine von Ohm nicht berücksichtigte Concentration von freier Elektricität stattfinden müsse. Bezeichnet man diese mit $\pm \epsilon$, wo das obere Vorzeichen für den einen, das untere für den andern Punkt gilt, und bezeichnet δ den kleinen Abstand beider Punkte von einander, so lässt sich die elektromotorische Kraft, welche durch für jeden Punkt der Kette noch hinzukommt, nach demselben Satze bestimmen, welches Gauss für die Wirkung eines Magnets in der Ferne gegeben hat. Siehe «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 33. 34. Ist nämlich ACA' der kreisförmige Leiter und in A die Kontaktstelle, und die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche durch die freie Elektricität $\pm \epsilon$ zu beiden Seiten von A im Punkte C des Leiters hervorkommt; so ziehe man in A die Tangente und verlängere sie, bis sie in B die verlängerte Gerade $A'C$ schneidet, wo A' denjenigen Punkt des Kreises bezeichnet, welcher dem Punkte A diametral gegenüber

der verschiedenen Theile der Kette in Betracht gezogen und hat das Gesetz zu begründen gesucht, dass bei gleicher Stromintensität der Unterschied der Ladung an zwei Stellen, zwischen welchen keine elektromotorische Kraft gegeben ist (kein Berührungspunkt verschiedener Metalle), dem Widerstande des zwischen beiden Stellen liegenden Theils der Kette proportional sei, und dass dagegen an einer solchen Stelle, wo eine elektromotorische Kraft gegeben ist (wo z. B. zwei verschiedene Metalle sich berühren), die Ladung von der einen Seite zur andern einen plötzlichen Sprung mache, und dass der Unterschied der Ladung auf beiden Seiten der für diese Stelle gegebenen elektromotorischen Kraft proportional sei; dass endlich bei verschiedener Stromintensität der Unterschied der elektromotorischen Ladung an zwei bestimmten Stellen desselben Leiters der Stromintensität proportional sei. Hierdurch geleitet, hat dann Ohm ein analoges Grundgesetz für die elektrische Strömung in jedem Theile der Kette in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Ladung aufgestellt, wie Fourier für die Wärmeströmung in jedem Theile eines Wärmeleiters in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der Temperatur, und hat nachgewiesen, dass die aus dieser Analogie gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen, so weit als deren Resultate verbürgt werden können.

Ohm hat wirklich in der Vertheilung der elektrischen Ladung den wahren Schlüssel gefunden zur Eröffnung des Uebergangs von dem erfahrungsmässig begründeten, die ganze geschlossene Kette umfassenden Gesetze zu dem wahren Grundgesetze, wie es allgemein von jedem Theile der Kette aufgestellt werden muss; was aber die Wirkung dieser elektrischen Vertheilung auf die Bewegung der Elektrizität betrifft, die er bloss nach der Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme betrachtet hat, so liegen Annahmen zu Grunde, welche weder nothwendig, noch zulässig erscheinen; denn die Wirkung der freien Elektrizität ist durch das allgemeine Grundgesetz der Elektrizitätslehre oder, wenn man von den relativen Bewegungen abstrahiert, durch das Grundgesetz der Elektrostatik schon gegeben und kann daraus für jede Vertheilung im Leiter berechnet werden, woraus sich leicht die Unzulässigkeit willkürlicher Annahmen nach blosser Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme nachweisen lässt. Schon was die Vertheilung selbst

erscheint es hiernach unzulässig, eine andere Vertheilung der Elektricität als an der Oberfläche des Leiters anzunehmen. Leuchtet ein wesentlicher Unterschied auch daraus ein, dass in der Wärmefortpflanzung und der in der Richtung derselben eintretenden Temperaturabnahme eine so nothwendige Beziehung statt- dass erstere ohne die letztere gar nicht möglich ist. Eine solche Abhängigkeit der elektrischen Strömung von der Vertheilung der freien Elektricität findet in der galvanischen Kette nicht statt, weil die Kräfte, welche die elektrische Strömung hervorbringen, nicht bloss von der unmittelbaren Umgebung, sondern auch aus grösseren Entfernungen wirken und daher ihren Sitz auch ganz ausserhalb des Leiters haben können, was in einem Wärmeleiter nicht möglich ist.

Nehmen wir z. B. einen kreisförmigen kupfernen Ring zum Leiter, dessen Querschnitt überall gleich ist, und bewege in der durch seinen Mittelpunkt senkrecht auf seine Ebene gelegten Geraden einen Magnet. Der Magnet übt bekanntlich bei dieser Bewegung auf alle Ringelemente eine elektromotorische Kraft aus und es wird dadurch, weil allen Elementen auch gleicher Widerstand zukommt, eine gleiche elektrische Strömung gleichzeitig in allen Elementen hervorgebracht, woraus folgt, dass an keiner Stelle des Ringes eine grössere oder geringere An- sammlung von positiver oder negativer Elektricität entstehen kann.

Wir haben hier also den Fall eines Stroms in einer geschlossenen Kette ohne eine Vertheilung freier Elektricität in der Kette. Das Gesetz der Abhängigkeit der Stromintensität von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter findet also in allen denjenigen Fällen keine Anwendung, wo die gegebenen elektromotorischen Kräfte sich über die ganze geschlossene Kette erstrecken und in allen Theilen den Widerständen proportional wirken. Nur bei ungleichmässiger Wirksamkeit der gegebenen elektromotorischen Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette tritt eine Vertheilung freier Elektricität ein, und das Factum, dass ein in allen Theilen der Kette gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommt, beweist dann, dass diese Vertheilung der freien Elektricität im Leiter die Wirkung habe, alle Ungleichheiten in der ursprünglichen Wirkungsweise der elektromotorischen Kräfte auszugleichen. Wird nun aber diese Ausgleichung durch das Factum der Existenz eines beharrlichen Stroms als bewiesen betrachtet, so bleibt noch übrig: erstens nachzuweisen, wie eine solche Vertheilung

nach dem elektrischen Grundgesetze möglich ist und wie sie beschaffen sein müsse, zweitens, wie sie entstehe und erhalten werde.

29.

Nachweisung der Möglichkeit einer Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wodurch die Ungleichheiten der Wirksamkeit gegebener elektromotorischer Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände ausgeglichen werden.

Jedes Theilchen freier (positiver oder negativer) Elektricität, welches sich an der Oberfläche eines Leiters befindet, übt elektromotorische Kräfte auf alle Theile des Leiters aus, welche die gegebenen elektromotorischen Kräfte der Kette an einigen Stellen schwächen, an andern verstärken, und es fragt sich daher, ob eine solche Vertheilung freier Elektricität auf der ganzen Oberfläche des Leiters möglich sei, durch welche die elektromotorische Kraft überall, wo sie zu schwach ist, verstärkt, wo sie zu stark ist, geschwächt, und auf diese Weise eine Ausgleichung der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände zu Stande gebracht werde, welche die Bedingung eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms ist. Diese Frage muss, wenn vor der Hand von dem Einflusse der relativen Bewegungen der elektrischen Theilchen gegen einander abstrahiert wird, aus dem Grundgesetze der Elektrostatik entschieden werden, wodurch die von der Elektricität bei jeder beliebigen Vertheilung an der Oberfläche auf alle Punkte im Innern des Leiters ausgeübten Kräfte bestimmt sind.

Poisson hat bekanntlich aus dem Grundgesetze der Elektrostatik folgendes Theorem bewiesen:

Wenn auf einen Leiter von beliebiger Gestalt von aussen beliebige elektrische Kräfte wirken, so ist an der Oberfläche des Leiters immer eine solche Vertheilung freier Elektricität möglich — aber nur eine einzige — bei welcher die elektrischen Kräfte, welche von dieser vertheilten freien Elektricität herrühren, den von aussen her wirkenden elektrischen Kräften in allen Punkten im Innern des Leiters zugleich das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich nun zunächst einen Leiter von cylindrischer Form und in der Richtung seiner Axe in grosser Entfernung eine concentrirte

freien (positiven oder negativen) elektrischen Fluidums, welche Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele Kräfte so folgt aus obigem Lehrsatz die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Cylinders, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele elektromotorische Kräfte resultieren, nämlich diejenigen Kräfte, welche den von der fernen Masse vorgefallenen Kräften das Gleichgewicht gehalten hatten.

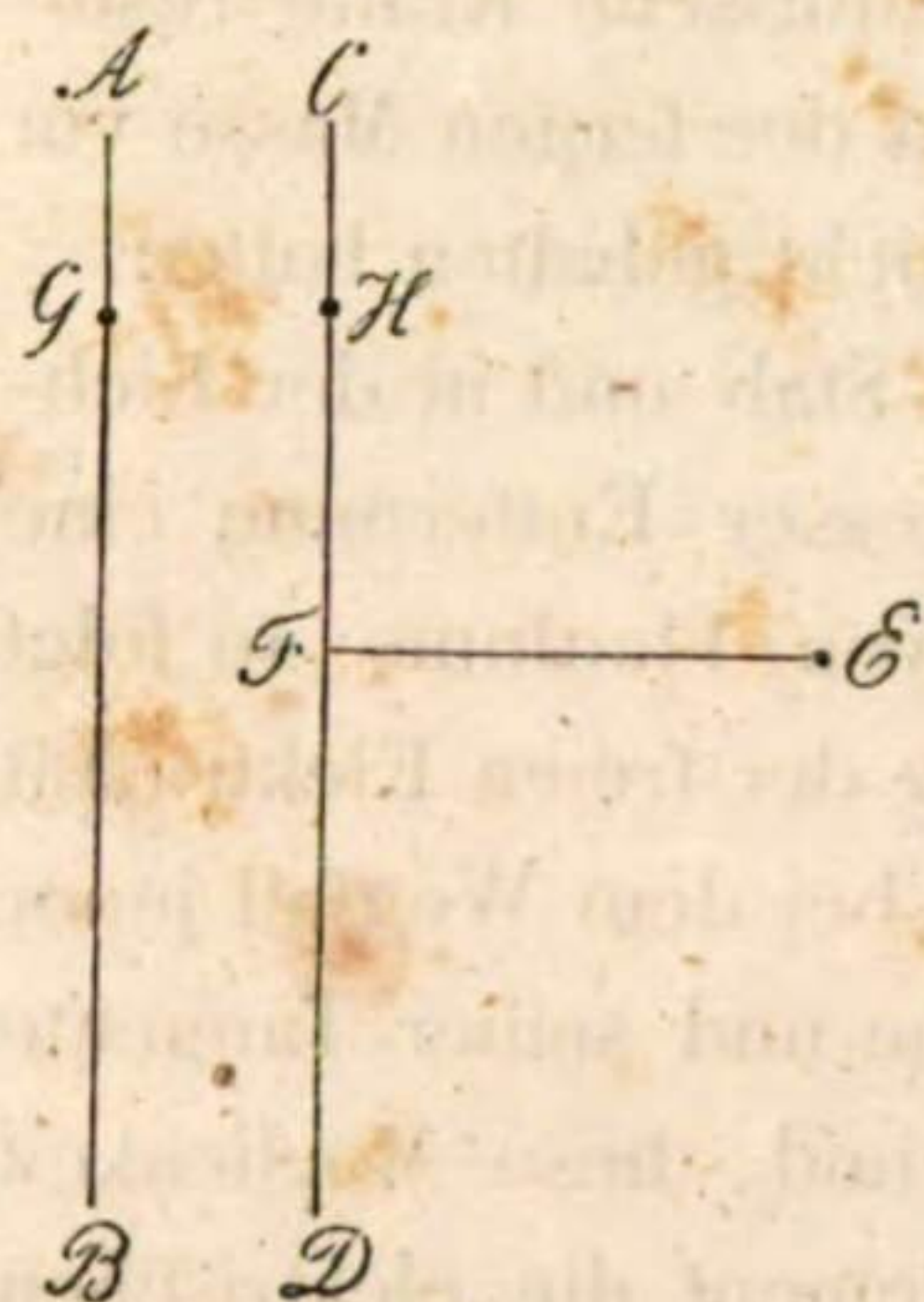
Nimmt man sich dagegen einen gebogenen Stab und in der Richtung der Tangente eines seiner Elemente in grosser Entfernung eine Ladung freie Masse (positiven oder negativen) Fluidums; so folgt die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche dieses Elements, aus welcher, bei dem Wegfall jener Masse, für alle Theile des Elements gleiche und seiner Tangente parallele elektromotorische Kräfte resultieren, und diese Möglichkeit besteht auch dann, wenn auf das betrachtete Element die elektrischen Kräfte aller andern Elemente des gebogenen Stabes wirken, wie diese Ladungen beschaffen sein mögen, nur dass alsdann die Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des betrachteten Elements von der Ladung des übrigen Stabs abhängig ist.

Diese Betrachtung lässt sich nun auf alle Elemente des gebogenen Stabs anwenden, so dass für alle Elemente gleiche und ihren Tangenten parallele elektromotorische Kräfte resultieren. Die Ladungen aller einzelnen Elemente werden dadurch von der Ladung des ganzen Stabs abhängig gemacht, und die Ladung des ganzen Stabs muss endlich gleich der Summe der Ladungen aller Elemente gleich gesetzt werden.

Eine auf solche Weise gewonnene Bestimmung der Ladung des gebogenen Stabs wird nun gelten, der Stab möge nur einen kleinen oder einen grösseren Theil von einem Kreise bilden. Die Ladungen in den Berührungsflächen je zweier an einander grenzender Elemente müssen sich neutralisieren, so dass die Vertheilung der freien Elektricität auf die Oberfläche des Stabs beschränkt bleibt, zu welcher aber wesentlich die Anfangsfläche und Endfläche des Stabs gerechnet werden müssen, welche daher nicht zusammenfallen dürfen.

Die Nothwendigkeit, Anfang und Ende des Stabs geschieden zu halten, wenn die an der Oberfläche vertheilte freie Elektricität in

allen Elementen des Stabs gleiche elektromotorische Kräfte nach tangentialer Richtung ausüben soll, folgt daraus, dass die Ladungen am **An-**fange und am Ende des Stabs, bei gegenseitiger Annäherung, **keinem** bestimmten Grenzwerthe sich nähern, sondern ins Unendliche **wachsen** müssten; wie man sich durch folgende Betrachtung überzeugen kann.



Es stelle **AB** die Anfangsfläche, **CD** die Endfläche des Stabs dar; der sehr kleine **Ab-**stand beider Flächen von einander heisse δ . Es darf angenommen werden, dass bei **einer** Verkleinerung von δ die Vertheilung der **freien** Elektricität auf der ganzen Staboberfläche mit Ausnahme von **AB** und **CD** nahe unverändert bleibt, woraus folgt, dass die für einen Punkt **E** des Stabs resultierende elektromotorische **Kraft** als unverändert angesehen werden kann, wenn nur die aus den Ladungen der beiden Flächen

AB und **CD** für **E** resultierende elektromotorische Kraft gleich geblieben ist. **G** und **H** seien zwei gleiche, einander gegenüberliegende Elemente der Flächen **AB** und **CD**. Die Ladung des Elements **G** werde mit $-e$, die Ladung des Elements **H** mit $+e$ bezeichnet. Der Abstand **FH**, senkrecht auf die Richtung der für **E** resultierenden elektromotorischen Kraft, heisse β ; der Abstand **FE** heisse α . Alsdann ergibt sich die **von** **H** auf **E** nach der tangentialen Richtung **EF** wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{+ae}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

die von **G** auf **E** nach der nämlichen Richtung wirkende Kraft

$$= \frac{-(\alpha + \delta)e}{[(\alpha + \delta)^2 + \beta\beta]^{\frac{3}{2}}}$$

folglich die Summe beider Kräfte, wenn δ gegen α sehr klein ist,

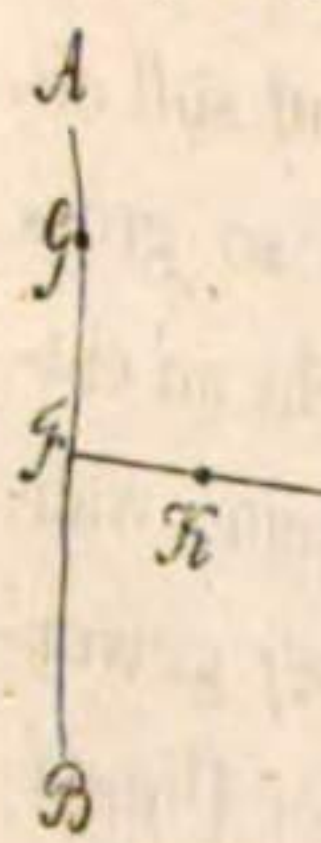
$$= \frac{2\alpha\alpha - \beta\beta}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta e.$$

Hieraus folgt also, dass die für **E** resultierende elektromotorische **Kraft** bei der Verkleinerung von δ unverändert bleibt, wenn das Product δe gleichen Werth behält. Für verschwindende Werthe von δ müsste **also** die Ladung e ins Unendliche wachsen, was zu beweisen war.

Zugleich leuchtet daraus ein, dass, wenn die im ganzen Stabe gleiche elektromotorische Kraft wachsen oder abnehmen soll, auch **der** Werth des Products δe sich proportional ändern müsse.

Bezeich
gelegenen P
und CD auf
Richtung wie
bildet werde
gleichem Sin
und beharrli
einer von d
unabhängige
wenn Kupfer
nachweisen
ten K der L
chen verbind
proportional
der gegeben
Aus d

*) Es s



folglich für

Für alle
hiernach

endlich

oder, we

Dasselbe
giebt sich
ducte δe

Abhandl

zeichnet endlich K einen zwischen den Flächen AB und CD n Punkt, so leuchtet ein, dass die Ladungen der Flächen AB auf K eine elektromotorische Kraft nach entgegengesetzter wie auf E ausüben. Soll daher ein geschlossener Kreis werden, in welchem überall gleiche elektromotorische Kräfte in Sinne wirken, was nothwendig ist, wenn ein gleichförmiger rrllicher Strom zu Stande kommen soll, so muss K der Sitz der Vertheilung der freien Elektricität an der Staboberfläche gigen elektromotorischen Kraft sein, welches z. B. der Fall ist, pfer und Zink im Punkte K einander berühren. Auch lässt sich sen, dass die gegebene elektromotorische Kraft in allen Punk- der Linie δ , welche die beiden entgegengesetzt geladenen Flä- erbindet, unter sonst gleichen Verhältnissen dem Produkte δe onal sein müsse, und dass also dieses Produkt als ein Maass egebenen elektromotorischen Kraft betrachtet werden dürfe. *)

us diesen allgemeinen Betrachtungen lassen sich nun folgende

Es stellen AB und CD die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen dar, deren Abstand $= \delta$ ist. G sei ein Element der Fläche AB , dessen Ladung mit e bezeichnet wird. Der Abstand FG , senkrecht auf die Richtung der für K resultierenden elektromotorischen Kraft, werde mit β , der Abstand FK mit α bezeichnet. Dann ergibt sich die von G auf K nach der Richtung FK wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{e\alpha}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

h für alle Punkte K von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \delta$

$$= e \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}} \right).$$

alle Flächenelemente, welche in gleicher Entfernung β von F liegen, erhält man nach durch Multiplication mit $2\pi\beta$

$$2\pi e \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}} \right);$$

ch für alle Flächenelemente von $\beta = 0$ bis $\beta = b$

$$2\pi e \left(\delta + b - \sqrt{(bb + \delta\delta)} \right)$$

weil δ gegen b sehr klein ist,

$$2\pi e\delta.$$

elbe Resultat ergibt sich für die von der Fläche CD ausgeübte Kraft, und es er- sich folglich die Summe beider Kräfte $= 4\pi e\delta$, d. h. proportional dem Pro- e δe .

Resultate ziehen, welche eine Vergleichung mit den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette gestatten.

1. Aus obiger Betrachtung folgt, dass in einem geschlossenen Ringe durch blosse Vertheilung der freien Elektricität an seiner Oberfläche kein Strom möglich ist, sondern dass wenigstens in einem Querschnitte dieses Ringes elektromotorische Kräfte, z. B. durch die Berührung von Kupfer mit Zink, gegeben sein müssen, wenn durch Vermittelung einer gewissen Vertheilung der freien Elektricität an der Ringoberfläche ein gleichförmiger und beharrlicher Strom im ganzen Ringe zu Stande kommen soll.

2. Wenn in einer bestimmten Kette der Strom verdoppelt werden soll, so muss die Menge der freien Elektricität auf der ganzen Oberfläche verdoppelt werden; folglich muss auch eine Verdoppelung des Factors e im Producte δe stattfinden, d. h. eine Verdoppelung der damit proportionalen elektromotorischen Kraft. Einer Verdoppelung der elektromotorischen Kraft entspricht also eine Verdoppelung der Stromintensität in der nämlichen Kette.

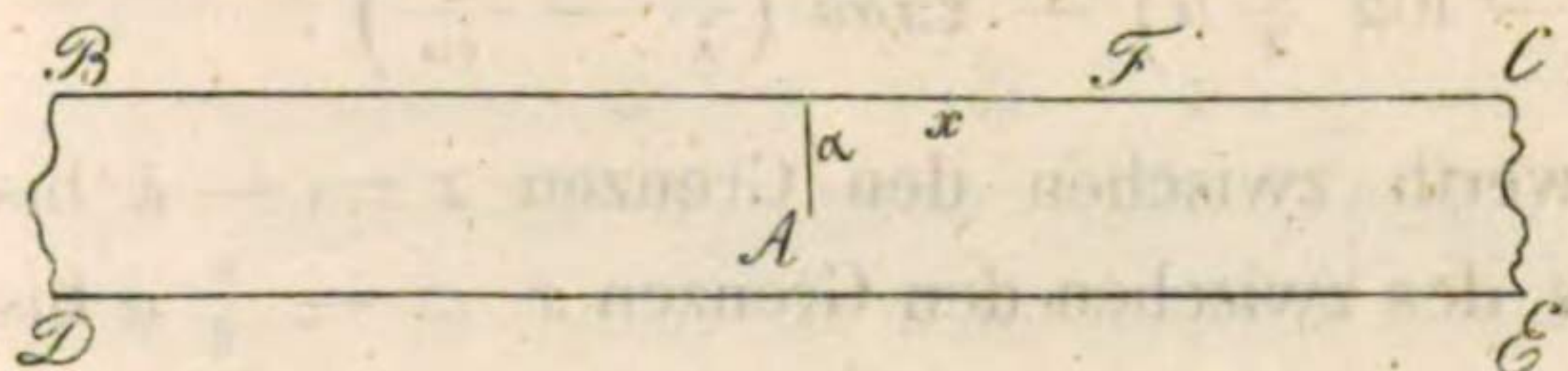
3. Werden alle Dimensionen einer Kette verdoppelt und soll dabei die elektromotorische Kraft in allen Punkten noch eben so gross wie vorher bleiben, so muss die Dicke der elektrischen Schicht an entsprechenden Stellen der Oberfläche unverändert geblieben sein, während die davon bedeckte Stelle der Oberfläche 4 Mal grösser geworden ist. Zugleich ergiebt das proportionale Wachsthum aller Dimensionen, dass auch der Abstand δ in dem Producte δe verdoppelt gedacht werden muss, wonach also, da e unverändert geblieben ist, das Product δe und die damit proportionale elektromotorische Kraft verdoppelt sein muss. Hieraus folgt, dass eine doppelte elektromotorische Kraft erfordert werde, um in einer Kette von doppelter Länge und vierfachem Querschnitte eine eben so starke elektrische Bewegung in allen Punkten hervorzubringen, wie in einer Kette von einfacher Länge und einfachem Querschnitte. Eine solche in allen Punkten gleich starke elektrische Bewegung giebt aber bei vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität. Die doppelte elektromotorische Kraft bringt also in einer Kette von doppelter Länge und von vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität hervor, was nach den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette auch wirklich der Fall ist.

Eine vollständige Entwicklung der Gesetze der galvanischen Kette fordert eine nähere Bestimmung der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche der Kette.

30.

Ueber das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms.

Bei einem linearen Leiter ist es gestattet, für die Vertheilung der freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in derjenigen Linie, welche die Axe des Leiters bildet, zu setzen. Es leuchtet dies in Beziehung auf alle Theile des Leiters von selbst ein, welche in grösserer Entfernung von demjenigen Punkte liegen, für welchen die von jener freien Elektricität ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll, und es bleibt daher nur übrig, den Beweis für denjenigen Theil des Leiters zu führen, welcher jenem Punkte zunächst liegt.



Es sei A derjenige Punkt, für welchen die von der freien Elektricität des Leiterelements

$BCDE$ ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll; α bezeichne den unendlich kleinen Halbmesser des Leitungsdrahtes. Die Dicke der Schicht der freien Elektricität in dem Punkte F , dessen geringer Abstand von dem durch A gehenden Querschnitt des Leiters mit x bezeichnet werde, kann dargestellt werden durch

$$a + bx$$

und die elektromotorische Kraft welche die freie Elektricität des Flächenelements $2\pi\alpha dx$ bei F auf den Punkt A ausübt, durch

$$\frac{2\pi\alpha (a + bx) dx}{\alpha\alpha + xx}$$

woraus die Componente dieser Kraft nach der Richtung der Axe folgt,

$$= \frac{2\pi\alpha (a + bx) x dx}{(\alpha\alpha + xx)^{\frac{3}{2}}}$$

Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ ist hiernach

$$2\pi\alpha b \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{xx dx}{(\alpha\alpha + xx)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\alpha b \left(\log \frac{\sqrt{(\lambda\lambda + \alpha\alpha)} + \lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + \alpha\alpha)} - \lambda} - \frac{2\lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + \alpha\alpha)}} \right)$$

oder, weil α gegen λ sehr klein ist,

$$= 4\pi ab \cdot \log \frac{2\lambda}{e\alpha} = 4\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha)$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Wäre nun dieselbe freie Elektrizität, statt auf der Oberfläche des Leiters vertheilt, in seiner Axe concentrirt, so würde von dem Axenelemente, in welchem die freie Elektrizität $2\pi\alpha(a+x)dx$ concentrirt wäre, auf A nach der Richtung der Axe eine elektromotorische Kraft wirken, welche dargestellt wird durch

$$\pm \frac{2\pi\alpha(a+bx)dx}{xx}$$

je nachdem x einen positiven oder negativen Werth hat. Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = -\frac{e}{2}\alpha$ ist

$$= 2\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha) + 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right)$$

zwischen den Grenzen $x = +\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\lambda$

$$= 2\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha) - 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right);$$

folglich ist der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$, mit Ausschluss des zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ fallenden Theils,

$$= 4\pi ab (\log \lambda - \log \frac{e}{2} \alpha)$$

woraus hervorgeht, dass es gestattet ist, für die Vertheilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in der Axe des Leiters zu substituieren, wenn man in dem Integralwerthe der elektromotorischen Kraft denjenigen Theil ausschliesst, welcher zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ liegt.

Hat z. B. der lineare Leiter die Gestalt eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, und bezeichnet A den Anfangspunkt eines Bogens $AB = r\varphi$, welcher der Sitz der gegebenen elektromotorischen Kraft der Kette ist; so sei

$$f\varphi \cdot d\varphi$$

die freie Elektrizität des Bogenelements $rd\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$. Der Werth des Potentials dieser elektrischen Masse im Punkte C am Ende des Bogens $AC = r\psi$ ist dann

$$= \frac{f\varphi \cdot d\varphi}{2r \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

folglich der Werth des Potentials der elektrischen Masse des ganzen Leiters im Punkte C

$$\frac{1}{2r} \int \frac{f\varphi \cdot d\varphi}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = F\psi$$

wo die Integration von $\varphi = \psi + \frac{e}{2} \frac{a}{r}$ bis $\varphi = 2\pi + \psi - \frac{e}{2} \frac{a}{r}$ zu erstrecken ist. Hieraus ergibt sich die auf den Punkt C ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= \frac{d \cdot F\psi}{rd\psi}.$$

Soll nun diese elektromotorische Kraft in allen Theilen des Leiters gleich sein, d. h. soll $\frac{d \cdot F\psi}{rd\psi}$ einen constanten Werth c haben, so erhält man

$$F\psi = c\psi + \text{const.}$$

oder, bei symmetrischer Vertheilung der freien positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $F\pi = c\pi + \text{const.} = 0$ ist,

$$F\psi = c(\psi - \pi).$$

Sollte nun auch die Auffindung der allgemeinen Form der Function $f\varphi$ Schwierigkeiten finden, so ist es doch nicht schwer, die von Ohm darüber aufgestellte Hypothese einer Prüfung zu unterwerfen und zu entscheiden, ob und in wie weit dieselbe zulässig sei.

Die Ohm'sche Hypothese besteht wesentlich darin, dass der Werth $f\varphi$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ proportional mit φ wachse und dass also für den Fall der symmetrischen Vertheilung der positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $f(0) = -f(2\pi)$ ist,

$$f\varphi = a(\varphi - \pi).$$

Dies vorausgesetzt, lässt sich der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Leiters in demjenigen Punkte, für welchen $\varphi = \psi$ ist, folgendermassen bestimmen.

A sei der Anfangspunkt des Bogens $r\varphi$; $AB = BD = r\psi$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von A bis D lassen sich paarweise nach ihrem Abstände von B ordnen. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $B = 2r \sin \frac{1}{2} \chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von B . Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi - \pi) d\chi \text{ und } a(\psi + \chi - \pi) d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi - \pi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} \chi} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi - \pi) d\chi}{2r \sin \frac{1}{2} \chi},$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a(\psi - \pi) dz}{r \sin \frac{1}{2} \chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens AD im Punkte B ergibt sich hieraus

$$\frac{a(\psi - \pi)}{r} \int_{\frac{ea}{2r}}^{\psi} \frac{dz}{\sin \frac{1}{2} \chi} = \frac{2a(\psi - \pi)}{r} \cdot \left(\log \tan \frac{1}{4} \psi - \log \tan \frac{ea}{8r} \right).$$

Der Punkt C des Kreises liege dem Punkte B diametral gegenüber, folglich der Bogen $ABC = r(\psi + \pi)$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von D über C nach A lassen sich ebenfalls paarweise ordnen nach ihrem Abstände von C . Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi + \pi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $C = 2r \sin \frac{1}{2} \chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \pi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von C . Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi) d\chi \text{ und } a(\psi + \chi) d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi) dz}{2r \sin \frac{1}{2} (\pi - \chi)} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi) dz}{2r \sin \frac{1}{2} (\pi + \chi)}$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a\psi}{r} \cdot \frac{dz}{\cos \frac{1}{2} \chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens DCA im Punkte B ergibt sich hieraus

$$\frac{a\psi}{r} \int_0^{\pi - \psi} \frac{dz}{\cos \frac{1}{2} \chi} = - \frac{2a\psi}{r} \log \tan \frac{1}{4} \psi$$

der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Kreises also

$$= - \frac{2a\psi}{r} \log \tan \frac{ea}{8r} - \frac{2a\pi}{r} \left(\log \tan \frac{1}{4} \psi - \log \tan \frac{ea}{8r} \right).$$

Hieraus ergibt sich die auf den Punkt B ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= - \frac{2a}{rr} \log \tan \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi}$$

oder

$$= \frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi}.$$

Für diejenigen Werthe von ψ , welche von π wenig verschieden sind, ergibt sich hiernach die elektromotorische Kraft nahe gleich; je mehr aber der Werth von ψ dem Werthe von 0 oder 2π nahe kommt, desto tiefer sinkt die elektromotorische Kraft unter jenem Grenzwerte herab, woraus also folgt, dass die Ohm'sche Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität nur für den mittlern Theil der Kette näherungsweise zulässig ist.

So wie nun nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette kleiner ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwert, so lässt sich auch leicht eine Hypothese aufstellen, nach welcher er grösser sein würde. Die Ohm'sche Hypothese bedarf nämlich nothwendig einer Ergänzung, wenn sie nicht mit dem Satze in Widerspruch stehen soll, dass aus der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche eines Leiters eine im Innern des Leiters überall gleiche elektromotorische Kraft nur dann resultieren könne, wenn zwei Querschnittsflächen des Leiters zu jener Oberfläche gehören (s. S. 275). Denn hiernach muss in unserer linearen Darstellung alle in diesen beiden Querschnittsflächen befindliche freie Elektricität in zwei Punkten concentrirt gedacht werden, während in der ganzen übrigen Kette nur die in der Begrenzungslinie eines Querschnitts befindliche Elektricität in einem Punkte concentrirt gedacht wird. Es ergibt sich daraus, dass wenigstens in den jene beiden Querschnitte darstellenden Endpunkten eine von Ohm nicht berücksichtigte Concentration von freier Elektricität stattfinden müsse. Bezeichnet man diese mit $\pm \varepsilon$, wo das obere Vorzeichen für den einen, das untere für den andern Punkt gilt, und bezeichnet δ den kleinen Abstand beider Punkte von einander, so lässt sich die elektromotorische Kraft, welche dadurch für jeden Punkt der Kette noch hinzukommt, nach demselben Gesetze bestimmen, welches Gauss für die Wirkung eines Magnets in die Ferne gegeben hat. Siehe «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 33. 34. Ist nämlich ACA' der kreisförmige Leiter und in A die Contactstelle, und soll die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche durch die freie Elektricität $\pm \varepsilon$ zu beiden Seiten von A im Punkte C des Leiters hinzukommt; so ziehe man in A die Tangente und verlängere sie, bis sie in B die verlängerte Gerade $A'C$ schneidet, wo A' denjenigen Punkt des Kreises bezeichnet, welcher dem Punkte A diametral gegenüber

liegt; ferner mache man $AD = \frac{1}{3} AB$ und ziehe CD ; so ist CD die Richtung der elektromotorischen Kraft, welche $\pm \varepsilon$ in C ausübt, und die Grösse dieser Kraft wird dargestellt durch

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{AC^3}.$$

Zieht man endlich die Tangente des Kreises in C und fällt darauf das Perpendikel DE ; so ergibt sich die Componente nach der Richtung der Kreistangente in C , d. i. die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{AC^3} = \frac{CE}{AD} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{AC^3}.$$

Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises mit r und den Kreisbogen AC mit ψ , so findet man dafür den Ausdruck

$$\frac{1 + \cos \frac{1}{2} \psi^2}{\sin \frac{1}{2} \psi^3} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{8r^3}.$$

Fügt man nun diese elektromotorische Kraft der nach der Ohm'schen Hypothese gefundenen noch hinzu, so erhält man

$$\frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2} \psi} + \frac{1 + \cos \frac{1}{2} \psi^2}{\sin \frac{1}{2} \psi^3} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{8r^3}.$$

Auch dieser Werth ist nahe constant für solche Werthe von ψ , welche von π wenig verschieden sind, wie man ersieht, wenn man den Differentialquotienten entwickelt, nämlich

$$\frac{\cos \frac{1}{2} \psi}{2rr \sin \frac{1}{2} \psi^2} \left(a\pi - \frac{\delta \varepsilon}{4r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 + \cos \frac{1}{2} \psi^2}{\sin \frac{1}{2} \psi^2} \right) \right)$$

welcher für $\psi = \pi$ Null ist. Ausserdem kann aber der Werth von $\delta \varepsilon$ so bestimmt werden, dass auch der zweite und dritte Differentialquotient für $\psi = \pi$ Null ist, welches der Fall ist, wenn

$$\delta \varepsilon = \frac{8}{5} a\pi r$$

ist. Substituiert man diesen Werth von $\delta \varepsilon$ in dem Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man

$$\frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} + \frac{2a\pi}{5rr \sin \frac{1}{2} \psi^3} (3 \cos \frac{1}{2} \psi^2 - 2)$$

dessen Differentialquotient

$$= -\frac{3}{5} \frac{a\pi}{rr} \frac{\cos \frac{1}{2} \psi^3}{\sin \frac{1}{2} \psi^4}$$

für $\psi = \pi$ Null ist, weil er $\cos \frac{1}{2} \pi = 0$ zum Factor hat. Auch sieht man, dass die beiden folgenden Differentialquotienten für $\psi = \pi$ Null werden, weil sie ebenfalls den Factor $\cos \frac{1}{2} \pi = 0$ haben.

Man ersieht hieraus, dass nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen anderen Theilen der Kette grösser ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwert, statt er nach der

Ohm'schen Hypothese kleiner war. Die richtige Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität, aus welcher sich eine überall gleiche elektromotorische Kraft ergeben soll, ist also zwischen den von den beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzen eingeschlossen, was so viel heisst als: die elektrische Ladung der Kette wächst von dem Indifferenzpunkte zu dem Kontaktpunkte nicht gleichförmig, sondern allmählig beschleunigt. Die daraus hervorgehende, überall gleiche elektromotorische Kraft wird dann muthmasslich zwischen den durch die beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzwerten liegen, nämlich

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right) \text{ und } \frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right).$$

Der Factor a bezieht sich dabei auf das Gefälle der elektrischen Ladung in der Mitte der Kette, wenn man nach Ohm unter Gefälle den Differentialquotienten der Ladung $f\varphi$ in Beziehung auf den Bogen φ versteht.

31.

Die Vertheilung der freien Elektricität in einem linearen Leiter, durch welchen ein constanter Strom geht, und die Grösse der von dieser Vertheilung abhängigen elektromotorischen Kraft kann in jedem einzelnen Falle genähert auf folgende Weise bestimmt werden. Der Einfachheit wegen soll auch hier für den Leiter die Form eines Kreises angenommen werden und für einen einzigen Punkt desselben eine elektromotorische Kraft $= a$ gegeben sein.

Theilt man den Kreis durch die Punkte A , (A^1) , B , (A_1) in vier gleiche Theile und ist B der Punkt, für welchen die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist; so lässt sich leicht eine Vertheilung freier Elektricität in den beiden Punkten (A^1) und (A_1) angeben, durch welche die elektromotorischen Kräfte in den beiden Punkten A und B ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $+e$ die freie Elektricität in (A^1) , $-e$ in (A_1) und r den Halbmesser des Kreises, so ist $2r \sin \frac{1}{4} \pi = r\sqrt{2}$ der Abstand der Punkte A und B von (A^1) oder (A_1) . Hieraus ergibt sich nach dem Grundgesetze der Elektrostatik die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - \frac{2e}{4rr \sin \frac{1}{4} \pi^2} \cdot \cos \frac{1}{4} \pi = a - \frac{e}{rr} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{in } A = + \frac{2e}{4rr \sin \frac{1}{4} \pi^2} \cdot \cos \frac{1}{4} \pi = + \frac{e}{rr} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

folglich für die verlangte Ausgleichung

$$a = \frac{e}{rr} \cdot \sqrt{2}$$

oder

$$\pm e = \pm arr \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, wenn der Kreis durch die Punkte $A, (A^1), A^1, (A^2), \text{etc.}$ in $4n$ gleiche Theile getheilt wird und in dem A diametral gegenüberliegenden Punkte B die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist, eine solche Vertheilung freier Elektricität in $2n$ Punkten $(A^1), (A^2), \text{etc.}$, durch welche die elektromotorischen Kräfte in den $2n$ Punkten $A, A^1, \text{etc.}$ ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $\pm e_1$ die freie Elektricität in $(A^1), (A_1), \pm e_2$ in $(A^2), (A_2), \text{etc.}$, und r den Halbmesser des Kreises, und setzt man $\frac{\cos \frac{(2m-1)\pi}{4n}}{4rr [\sin \frac{(2m-1)\pi}{4n}]^2} = p_m$, so findet man die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - 2p_n \cdot e_1 - 2p_{n-1} \cdot e_2 - \dots - 2p_1 \cdot e_n$$

$$\text{in } A = 2p_1 e_1 + 2p_2 e_2 + \dots + 2p_n e_n$$

in A^m oder in A_m

$$= -p_m e_1 - p_{m-1} e_2 - \dots - p_1 e_m + p_1 e_{m+1} + \dots + p_{n-m} e_n \\ + p_{m+1} e_1 + p_{m+2} e_2 + \dots + p_n e_{n-m} - p_n e_{n-m+1} - \dots - p_{n-m+1} e_n$$

worin für m alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ gesetzt werden können. Durch Gleichsetzung aller dieser $(n+1)$ Werthe erhält man n Gleichungen zur Bestimmung der n unbekannten Grössen $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Ferner ergibt sich der Mittelwerth der beiden ersten von obigen $(n+1)$ gleichgesetzten elektromotorischen Kräften k

$$k = \frac{1}{2} a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \dots$$

und die Summe aller zusammen

$$(n+1) k = a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \dots$$

folglich

$$(n+1) k - a = k - \frac{1}{2} a$$

oder

$$a = 2nk.$$

Z. B. für $n = 2$ ergibt sich

$$e_1 = 0,01567 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,05833 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{4} a$$

4 :

$$e_1 = 0,001537 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,004744 \cdot 4rra$$

$$e_3 = 0,008570 \cdot 4rra$$

$$e_4 = 0,015922 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{8} a$$

8 :

$$e_1 = 0,0001582 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,0004771 \cdot 4rra$$

$$e_3 = 0,0008047 \cdot 4rra$$

$$e_4 = 0,0011495 \cdot 4rra$$

$$e_5 = 0,0015271 \cdot 4rra$$

$$e_6 = 0,0019726 \cdot 4rra$$

$$e_7 = 0,0025951 \cdot 4rra$$

$$e_8 = 0,0041187 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{16} a$$

Je grösser die Zahl n ist, desto mehr nähert sich der Werth von e_1 den

$$\frac{1}{3} e_2, \frac{1}{5} e_3, \dots$$

theilt man nun die Massen $e_1, e_2, \dots, e_m$, für welche die Abweichungen von den Massen $e_1, 3e_1, \dots, (2m-1)e_1$ als unmerklich vernachlässigt werden dürfen, auf die m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$, in deren Mitte sie liegenden. Dem Abstände x vom Punkte A proportional, so ist, wenn b einen constanten Factor bezeichnet,

$$b \int_0^{\frac{m}{n}\pi r} x dx = \frac{1}{2} b \cdot \frac{m m \pi \pi r r}{n n} = e_1 + e_2 + \dots + e_m = m m e_1,$$

$$\text{denn} \quad b = \frac{2 n n}{\pi \pi} \cdot \frac{e_1}{r r}.$$

war die elektromotorische Kraft der in der Mitte der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrirten Massen $e_1, e_2, \dots, e_m$ im Punkte A , wenn der Kreisbogen $\frac{m}{n} \pi r$ so klein ist, dass seine Abweichung von der geraden Linie als unmerklich betrachtet werden darf,

$$e_1 = \frac{4 n n}{\pi \pi r r} \cdot e_1$$

$$e_2 = \frac{4 n n}{\pi \pi r r} \cdot \frac{1}{9} e_2 = \frac{4 n n}{\pi \pi r r} \cdot \frac{1}{3} e_1$$

$$e_m = \frac{4 n n}{\pi \pi r r} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2} e_m = \frac{4 n n}{\pi \pi r r} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot e_1$$

also die ganze von diesen m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) e_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) b.$$

Die elektromotorische Kraft dagegen, welche von der nämlichen, nach dem angegebenen Gesetze stetig auf den ganzen Bogen $\frac{m}{n} \pi r$ vertheilten Masse im Punkte A ausgeübt wird, wenn diese lineare Vertheilung nach Art. 30 die Stelle der wirklichen Vertheilung auf der Oberfläche eines dünnen Drahts von dem Halbmesser α vertritt, wird gefunden

$$b \int_{\frac{e\alpha}{2}}^{\frac{m}{n} \pi r} \frac{dx}{x} = b \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}.$$

Diese beiden Ausdrücke für die von den m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft sind gleich, wenn α einen solchen Werth erhält, dass

$$2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) = \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}$$

d. i.

$$e\alpha = \frac{2m}{n} \pi r e^{-2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right)}$$

ist, worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Je grösser die Zahl n und folglich auch die Zahl m ist, desto geringer ist der Einfluss, welchen es auf den Werth von α hat, ob die Zahl m um einen oder einige Einheiten grösser oder kleiner genommen wird. Denn bezeichnet m eine grössere Zahl und α' den Werth, welchen α erhält, wenn m um 1 vergrössert wird, so lässt sich α' darstellen durch $\frac{2m^2 + 3m + 1}{2m^2 + 3m} \cdot \alpha$, was für grosse Werthe von m nur wenig von α verschieden ist. Für diesen Werth von α können also die in den Mittelpunkten der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrirten Massen freier Elektrizität an die Stelle einer gleich grossen, an der Oberfläche des Leiters stetig vertheilten Masse gesetzt werden; denn für den dem betrachteten Punkte zunächst liegenden Theil der Kette folgt dies aus der eben nachgewiesenen Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, für die ferneren Theile der Kette leuchtet es aber eben so wie Art. 30 von selbst ein.

Für den oben betrachteten Fall, wenn $n = 8$ ist, sieht man leicht, dass m nicht grösser als 2 genommen werden kann; folglich

$$e\alpha = \frac{1}{2} \pi r e^{-\frac{5}{2}} = 0,10915 \cdot r.$$

Dieser Werth von α ist nun allerdings, weil so kleine Werthe von n und m ihm zu Grunde gelegt worden, nicht als genau zu betrachten und ergiebt sich ausserdem zu gross, als dass die Art. 30 entwickelten Regeln, welche nur für kleine Werthe von α gelten, mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden könnten. Eine genauere Anwendung dieser Regeln würde fordern, dass n nicht kleiner als 32 wäre, wo, wenn man $m = 4$ annähme,

$$e\alpha = \frac{1}{4} \pi r e^{-\frac{352}{405}} = 0,02749 \cdot r$$

erhalten würde. Der vorliegende Fall möge daher nur zur Erläuterung dienen, wie auf dem angegebenen Wege, trotz der Ungenauigkeit und der Grösse von α , die Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die daraus resultierende elektromotorische Kraft doch einigermaßen näherungsweise bestimmt werde. Ausser dem Werthe von $e\alpha$

$$e\alpha = 0,10915 \cdot r$$

hält man nämlich für diesen Fall

$$b = \frac{32}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1 + e_2}{rr} = 0,008239 \cdot a$$

und die in der ganzen Kette gleiche elektromotorische Kraft

$$k = \frac{1}{16} a.$$

Die Resultate lassen sich nur mit den S. 285 gegebenen Formeln vergleichen, wonach dieselbe elektromotorische Kraft näherungsweise durch folgende beide Ausdrücke dargestellt werden soll, nämlich durch

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right)$$

oder durch

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right)$$

zu beachten ist, dass dort das Massenelement der freien Elektricität in dem Bogenelemente $rd\varphi$, welches in einer kleinen Entfernung von Indifferenzpunkte A sich befindet, durch $a\varphi d\varphi$ ausgedrückt worden ist, während hier dasselbe Massenelement mit $bxdx$ bezeichnet wird, wo $x = r\varphi$ und $dx = rd\varphi$ ist: es ist also in diesen beiden Formeln brr zu setzen. Hiernach ergiebt sich nun näherungsweise

$$k = 2b \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right) = 0,04488 \cdot a$$

$$k = 2b \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right) = 0,05006 \cdot a$$

statt oben $k = \frac{1}{16} a = 0,0625 \cdot a$ gefunden worden ist. Man sieht also hieraus, dass, wenn der oben berechnete Werth von k mit den beiden letzteren Näherungswerthen auch nicht genau übereinstimmt, was bei der Ungenauigkeit und Grösse des Werths von a unmöglich ist, jener Weg doch selbst unter diesen ungünstigen Verhältnissen wenigstens zu einem Werthe für k von gleicher Grössenordnung führt. Eine grössere Uebereinstimmung darf erwartet werden, wenn die Rechnung z. B. für $n = 32$ oder für noch grössere Zahlen ausgeführt würde. Durch eine angemessene Vergrösserung der Zahlen n und m würde sich die Vertheilung der freien Elektricität in dem linearen Leiter sowohl, als auch die davon abhängige elektromotorische Kraft näherungsweise mit jeder verlangten Schärfe bestimmen lassen.

Es ist übrigens kaum nöthig, besonders zu bemerken, dass in obiger Darstellung die Kreisform des Leiters nur beispielsweise zur Vereinfachung der Rechnung gewählt worden ist, dass aber dieselbe Methode für jede andere lineare Form des Leiters anwendbar bleibt. Dasselbe gilt auch, wenn statt einer elektromotorischen Kraft mehrere solche Kräfte an verschiedenen Stellen des Leiters gegeben sind, oder wenn der Leiter in Abtheilungen von verschiedenem specifischen Widerstande zerfällt, und daher eine ungleichförmige Vertheilung der elektromotorischen Kraft nach Proportion dieses Widerstandes stattfinden muss. Ueberhaupt ist die Anwendung dieser Methode, abgesehen von dem Umfange der Rechnung, nur dadurch beschränkt, dass lineare Leiter vorausgesetzt werden.

32.

Nachweisung, wie die zu einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nothwendige Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des geschlossenen Leiters entstehe.

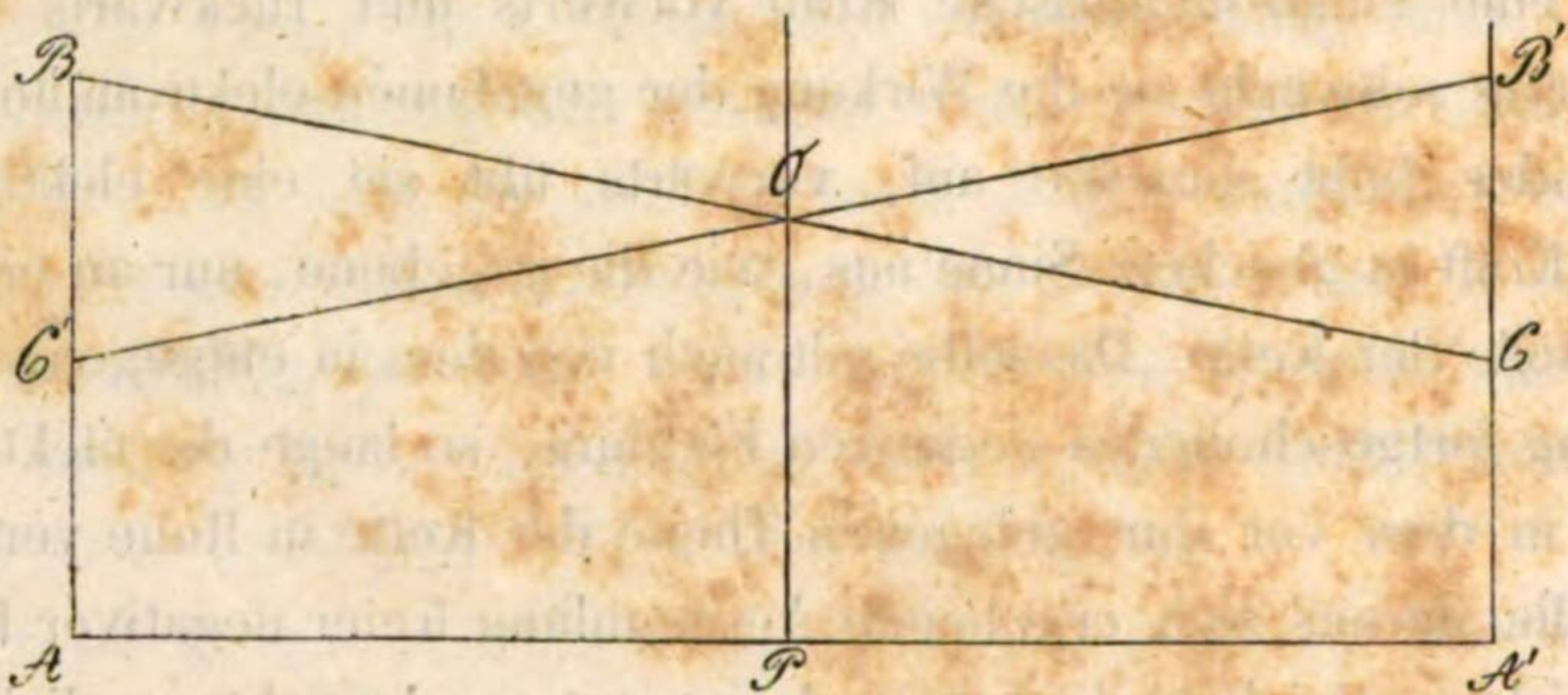
Es leuchtet ein, dass, wenn nur in einzelnen Punkten einer geschlossenen Kette elektromotorische Kräfte gegeben sind, unmittelbar nur in diesen Punkten eine elektrische Strömung beginnen kann und nicht in der ganzen Kette; denn in allen denjenigen Theilen der Kette, auf welche keine elektromotorischen Kräfte wirken, werden die elektrischen Fluida auch nicht bewegt. Beginnen aber die elektrischen Fluida an den Stellen, wo elektromotorische Kräfte gegeben sind, sich zu be-

wegen, und z
negative nach
ihnen noch i
positiven F
sammung v
gleich eine
Rückwärts
Kraft oder
rische Kra
dern Stelle
Richtung f
Fluida in
Auch die
cität wirk
wärts die
vorwärts
die geg
diese Be
einem g
lungen
können
unmitte
welche
versch
Oberfl
der v
nöth
Ele
Obe
Fal
das
rich
Ele
Ele
an
Die

und zwar das positive Fluidum nach der einen Richtung, das nach der entgegengesetzten Richtung, während die Fluida vor und nach in Ruhe beharren, so wird durch dieses Fortschieben des Fluidums nach der einen Seite zu auf dieser Seite eine Ansammlung von freier positiver Elektricität hervorgebracht, welche so eine elektromotorische Kraft vorwärts und rückwärts ausübt. Diese Kraft schwächt die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft, aber hebt dieselbe auf, vorwärts übt sie eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Dasselbe gilt auch von dem in entgegengesetzter Richtung fortgeschobenen negativen Fluidum, so lange die elektrischen Theile in dem vor ihm gelegenen Theile der Kette in Ruhe verharren. Die daraus sich ergebende Ansammlung freier negativer Elektricität wirkt sogleich rückwärts und vorwärts, schwächt nämlich rückwärts die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft und übt vorwärts eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Setzt man diese Betrachtung fort, so übersieht man im Allgemeinen, dass nur bei einem gleichförmigen Strome in allen Theilen der Kette diese Ansammlungen freier Elektricität zu wachsen aufhören und stationär werden können, und dass jede Abweichung von der Gleichförmigkeit des Stroms mittelbar eine Veränderung in diesen Ansammlungen mit sich führt, welche so lange zunimmt, bis die Ungleichförmigkeit des Stroms wieder verschwunden ist.

Die Art. 29, 30 erörterte Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters ist nun zwar der Art, dass kein Gleichgewicht der vertheilten freien Elektricität dabei bestehen kann; denn dazu wäre es nöthig, dass die Resultante aller Kräfte, welche ein Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche von allen übrigen erleidet, gegen die Oberfläche senkrecht und nach aussen gerichtet wäre, was nicht der Fall ist. Denn aus der Art. 29 gegebenen Darstellung erhellt von selbst, dass ausser einer gegen die Oberfläche senkrechten, nach aussen gerichteten Kraft noch eine tangential Kraft für jedes Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche resultiere, woraus folgt, dass diese freie Elektricität an der Oberfläche nicht in Ruhe beharren könne, sondern an der Strömung, welche im Innern stattfindet, Theil nehmen müsse. Diese Theilnahme der freien Elektricität der Oberfläche an der Strö-

nung im Innern kann aber mit einer unveränderten Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters wohl bestehen. Denn stellt man die Vertheilung aller strömenden positiven Elektricität, am Rande und im Innern, für den zu einer geraden Linie ausgestreckt gedachten Leiter AA' durch die Ordinaten einer anderen geraden



Linie BC dar und eben so die Vertheilung aller strömenden negativen Elektricität durch die Ordinaten einer dritten geraden Linie $B'C'$, welche die Linie BC in O schneidet, so sind nach dieser Darstellung im Querschnitt OP beide Fluida in gleicher Menge vorhanden; von P nach A zu wächst aber der Ueberschuss an positiver Elektricität proportional mit dem Abstände von P ; von P nach A' zu wächst der Ueberschuss an negativer Elektricität ebenfalls proportional mit dem Abstände von P . Die allgemeine Strömung wird alsdann durch ein gleich schnelles Fortrücken der Linien BC und $B'C'$ in entgegengesetzter Richtung parallel mit AA' dargestellt, woraus sich leicht ergibt, dass die Ordinate des Schneidungspunktes beider Linien PO , d. h. der Indifferenzpunkt der Kette, unverrückt bleibt und dass auch durch dieses Fortrücken das Wachsthum des Ueberschusses an einer von beiden Elektricitäten mit dem Abstände von P unverändert bleibt, wenn nur vorausgesetzt werden darf, dass in den Kontaktpunkten A, A' die fortgerückte Elektricität durch neu geschiedene immer so ersetzt wird, dass die fortgerückten Geraden BC und $B'C'$ rückwärts immer so weit verlängert werden, dass sie bis zu den Ordinaten der Punkte A, A' sich erstrecken. Nach dieser bildlichen Darstellung könnte es scheinen, als wenn die Menge der zwischen A und A' strömenden Elektricität immer grösser würde. Dies kommt daher, weil dabei die in A und A' immer neu geschiedene und nach entgegengesetzten Seiten bewegte Elektricität in Rechnung gebracht ist, während auf die zwischen A und A' durch Wieder-

vereinigung zur
men ist. Diese
zwischen A und
ein Fortrücken
schwindigkeit
Länge behält
befindlichen
In diese
für die Ladung
gehenden A
genommen
schwindigkeit
Elektricität
schuss der
gehen soll
statische V
legt wor
gehen a
nothwen

W
Annale
lischen
eine
der V
die
unt
O
Zu
mi
he
wo
fü
w
s

einigung zur Ruhe kommenden Elektricität keine Rücksicht genommen ist. Diese allmähliche Wiedervereinigung beider elektrischen Fluida A und A' lässt sich aber auch leicht bildlich darstellen durch Fortrücken der Abscissenlinie nach oben, welches mit solcher Geschwindigkeit geschehen kann, dass die Ordinate PO immer gleiche Lage behält, wodurch ausgedrückt wird, dass die Menge der daselbst vorhandenen positiven und negativen Elektricität unverändert bleibt.

In dieser Darstellung ist das Ohm'sche Gesetz der Proportionalität die Ladung der Kette angenommen. Sollte auf die in den vorhergehenden Artikeln erörterte Abweichung von diesem Gesetze Rücksicht genommen werden, so müsste zugleich auch der Unterschied der Geschwindigkeit in Rechnung gebracht werden, mit welcher die beiden Elektricitäten strömen müssen, wenn, bei einem vorhandenen Ueberschuss der einen, gleiche Quantitäten von beiden durch den Querschnitt fließen sollen. Auch dürfte dann, bei genauerer Erörterung, das elektrostatische Princip, welches hier der Einfachheit wegen zum Grunde genommen worden ist, nicht mehr genügend befunden und daher das Zurückgehen auf das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung für notwendig erachtet werden.

33.

Während des Drucks dieser Abhandlung ist in Poggendorffs Annalen Bd. 79. S. 506 eine von Herrn Dr. Kirchhoff der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gemachte Mittheilung erschienen: „Ueber die Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst“, worin die Principien, auf welchen auch die vorhergehenden Erörterungen beruhen, einer genaueren Prüfung unterworfen worden sind. Insbesondere ist gezeigt worden, dass die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette in keinem nothwendigen Zusammenhange mit der von Ohm bei ihrer Ableitung, im Widerspruche mit dem elektrostatischen Grundgesetze, gemachten Voraussetzung stehen, dass die Elektricität in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, und dass sie den Rauminhalt desselben mit gleichmässiger Dichtigkeit erfüllt; dass vielmehr die Ableitung jener Gesetze unverändert bleibe, wenn man statt jener mit dem elektrostatischen Grundgesetze in Widerspruch stehenden Voraussetzung eine andere damit übereinstimmende

und daraus mit Nothwendigkeit resultierende substituiert, nämlich dass das neutrale elektrische Fluidum in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn das Potential der an seiner Oberfläche vertheilten freien Elektricität im Innern des Leiters überall gleichen Werth hat, und wenn man, im Verlaufe der Ableitung, im Innern des Leiters den Potentialwerth der freien, an der Oberfläche befindlichen Elektricität für die Dichtigkeit der Elektricität setzt, welche nach Ohm im Innern des Leiters selbst stattfinden soll. Die von Kirchhoff hiervon gegebene Nachweisung ist so kurz gefasst, dass sie keinen Auszug gestattet, und es muss deshalb auf das Original selbst verwiesen werden. Es möge daraus nur die Schlussbemerkung angeführt werden, welche Kirchhoff beigefügt hat, durch die er die Zurückführung der Gesetze der galvanischen Kette auf das Grundgesetz der Elektrostatik zu rechtfertigen sucht, da doch die Gesetze der galvanischen Kette elektrodynamische Erscheinungen betreffen, zu deren Erklärung sonst das elektrostatische Grundgesetz im Allgemeinen nicht genügt. Es heisst a. a. O. S. 542:

«Dem durchgeführten Betrachtungen liegt das elektrostatische Gesetz der Wirkung elektrischer Theilchen zu Grunde. Aus diesem Gesetze lassen sich die Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen und die Inductionsercheinungen nicht erklären; Weber hat ein allgemeineres Gesetz gefunden, durch welches es ihm gelungen ist, jene Erscheinungen zu erklären, ein Gesetz, in dessen Ausdruck die relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren Wirkung auf einander betrachtet wird, vorkommt, und das in das elektrostatische übergeht, wenn diese Geschwindigkeit verschwindet. Um die verschiedenen Felder der Elektricitätslehre unter einen Gesichtspunkt zu bringen, muss man sich daher die Aufgabe stellen, die Gesetze der Strömungen in der geschlossenen Kette aus dem Weber'schen Gesetze abzuleiten. Diese Herleitung scheint schwer zu sein, doch ist es leicht, *a posteriori* zu beweisen, dass die Vorstellung von den Strömungen, zu denen die Annahme des elektrostatischen Gesetzes geführt hat, auch mit dem Weber'schen Gesetze in Einklang ist, wenn man noch eine gewisse Hypothese zu Hülfe nimmt, die Hypothese nämlich, dass bei der Berechnung der Kraft, welche eine Scheidung der beiden Elektricitäten in dem Raumelemente α eines der Leiter hervorbringt, die Elektricitäten in α als ruhend angesehen werden müssen. Diese Annahme hat nichts Widerstrebendes.

sich vorstellt, dass die Bewegung der Elektricität in einem von Molecül zu Molecül vor sich geht, so dass jedes Elektrische bei einem Molecüle, bei dem es ankommt, einen Ruhezustand findet. Bei dieser Vorstellung kann man leicht zugeben, dass die Strommenge, die von einem Molecüle zu einem benachbarten überträgt wird, nur durch die Kräfte bedingt wird, die auf die Elektrischen ausgeübt werden, während sie noch an jenem Molecüle in Ruhe befinden, nicht aber durch die Kräfte, die auf sie wirken, während sie schon auf dem Wege zum folgenden Molecül sind. Auf die Theorie der Induction, die Weber gegeben hat, ist es gleichgültig, ob man diese Annahme macht oder nicht. Macht man sie, und denkt sich übrigens die Strömungen in der Kette so, wie sie aus der Voraussetzung des elektrostatischen Gesetzes ergeben hat, so ist es in Bezug auf die Grösse und die Richtung der Kraft, welche die Elektrischen in dem Elemente v zu scheiden strebt, — also in Bezug auf die elektromotorische Kraft, wie Weber sie nennt, — gleichgültig, ob man das elektrostatische oder dem Weber'schen Gesetze folgt. Der Unterschied, der möglich wäre, müsste nämlich herrühren von den Kräften, welche die in den andern Theilen des Systems strömenden Elektricitäten ausüben, und diese Kräfte tragen nach Dem, was Weber bewiesen hat, zu jener elektromotorischen Kraft nichts bei, wenn die Strömungen constant sind und gleiche Mengen der beiden Elektrischen in nach entgegengesetzten Richtungen mit derselben Geschwindigkeit führen.»

34.

Vergleichung elektromotorischer und galvanometrischer Beobachtungen der galvanischen Kette diejenige relative Geschwindigkeit der elektrischen Massen zu bestimmen, bei welcher weder Anziehung noch Abstossung stattfindet.

Es ist das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms gegeben, so lässt sich darauf eine für die Elektricitätslehre im Allgemeinen gültige Anwendung gründen. Es leuchtet nämlich ein, dass alsdann die elektromotorische Kraft einer Kette auf doppelte Weise bestimmt werden kann, nämlich erstens aus ihrer Wirkung, d. h. aus der Inten-

sität des von ihr bei einem bekannten Widerstande der Kette hervor-
gebrachten Stroms. Hierdurch wird die Bestimmung der elektromoto-
rischen Kraft von den Messungen der Stromintensität und des Wider-
stands der Kette abhängig gemacht, welche beide, wie in dieser
Abhandlung gezeigt worden ist, nach absoluten Maassen ausführbar
sind. Zweitens kann sie aus ihrer Ursache bestimmt werden,
d. h. aus der auf der Oberfläche des Leiters vertheilten freien Elektri-
cität. Sind die Stromintensität i und der Widerstand der Kette w nach
den Art. 26 definierten Maassen gefunden, so wird die elektromoto-
rische Kraft der ganzen Kette nach dem dort angegebenen Maasse
durch das Produkt

$$iw$$

bestimmt, und dieser Werth kann nach Art. 27 durch Multiplication
mit $\frac{4}{c}$ auf das allgemeine Kraftmaass der Mechanik reducirt werden,
wo c die relative Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher zwei elek-
trische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie ein-
ander weder anziehen noch abstossen sollen. Die elektromotorische
Kraft der ganzen Kette ist also nach dem allgemeinen Kraftmaasse der
Mechanik, aus ihrer Wirkung berechnet,

$$= \frac{4}{c} iw.$$

Zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft derselben Kette aus ihrer
Ursache möge nun der im 30. Artikel gefundene Ausdruck

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta\pi \right)$$

zum Grunde gelegt werden, worin β einen kleineren Werth als $\frac{1}{2}$ und
einen grösseren als $\frac{2}{3}$ hat. Nach Seite 284 bezeichnet hierin a denjeni-
gen Factor, welcher mit $(\varphi - \pi)d\varphi$ multiplicirt die Masse der freien
Elektricität giebt, welche auf dem Längenelemente der Kette $rd\varphi$ am
Ende des Bogens $r\varphi$ vertheilt ist. Ist nun die Masse der freien Elektri-
cität zweier Elemente der Kette von der Länge dx , das eine am Ende
des Bogens $\pi - \chi$, das andere am Ende des Bogens $\pi + \chi$ wirklich
gemessen und erstere $= Edx$, letztere $= E'dx$ gefunden, so ist

$$Edx = - a\chi d\chi$$

$$E'dx = + a\chi d\chi$$

und $rd\chi = dx$ zu setzen; folglich

$$a = -\frac{r}{2\chi} (E' - E).$$

Setzt man nun diesen Werth für a in obigen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{E' - E}{r\gamma} \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right).$$

Dieser Ausdruck giebt aber nicht die elektromotorische Kraft für die ganze Länge der Kette, sondern nur für ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette und muss mit der Länge der Kette $= 2\pi r$ multipliciert werden, wenn die elektromotorische Kraft der ganzen Kette erhalten werden soll, nämlich:

$$\frac{2\pi}{\gamma} (E' - E) \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right).$$

Nach ergibt sich nun endlich durch Gleichsetzung der nach beiden Methoden bestimmten elektromotorischen Kraft der ganzen Kette folgende Gleichung:

$$\frac{4}{c} iw = \frac{2\pi}{\gamma} (E' - E) \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right)$$

$$c = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{iw}{E' - E} \cdot \frac{1}{\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi}.$$

Es ist also hierdurch diejenige Geschwindigkeit c bestimmt, mit welcher elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie auf einander weder abstossen noch anziehen sollen. Aus dem Grundsatz der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, wie es in der Abhandlung über «Elektrodynamische Maassbestimmungen» ausgesprochen worden ist, so wie aus Art. 27 in dieser Abhandlung, folgt, dass, wenn diese Geschwindigkeit c bekannt ist, die elektromotorischen Kräfte nach dem in der Mechanik festgesetzten Kraftmaasse ausgedrückt werden können, leuchtet die Wichtigkeit der Bestimmung dieser Geschwindigkeit c von selbst ein. Bei dieser Bestimmung von c ist es aber selbst schon von Interesse, die Möglichkeit der Bestimmung nachzuweisen, auch wenn die wirkliche Ausführung auf Hindernisse stossen sollte, welche noch nicht überwunden werden könnten, weil es dazu noch an den geeigneten Instrumenten fehlt. In der That dürften jetzt noch solche Hindernisse der Ausführung der feinen elektrometrischen Messungen entgegenstehen, durch welche die Grössen E' und E gefunden werden sollen. Alle unsere Elektroskope und Elektrometer scheinen zur Ausführung dieser Messungen nicht geeignet: es würde damit nur möglich sein, das Verhältniss der Grössen E und E' zu bestimmen, aber nicht ihren absoluten Werth, wenigstens ist bisher kein Versuch dieser Art damit ge-

macht worden. Die Construction neuer Elektroskope und Elektrometer, welche dazu geeigneter wären, bildet aber eine Aufgabe für sich, mit der wir uns hier nicht beschäftigen, weil wir uns in dieser Abhandlung nur auf elektrodynamische Maassbestimmungen beschränken.*

35.

Ueber das Verhältniss der Geschwindigkeit der Strömung zur Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Stroms.

Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida selbst in den Leitern sich bewegen, liegen noch gar keine Data vor. Man weiss nur, dass die Geschwindigkeit, mit welcher manche elektrische Phänomene, wie der Blitz, sich verbreiten, sehr gross sein müsse, da auch ihre Verbreitung durch die grössten Räume nicht den kleinsten messbaren Zeitraum erfordert. Eben so weiss man nur, dass die Verbreitung eines galvanischen Stroms durch eine lange Kette mit ausserordentlicher Geschwindigkeit geschehe, weil die Zeit, welche erfordert wird, bis ein an einer bestimmten Stelle der Kette erregter Strom in allen Theilen der Kette gleiche Intensität erlangt, so klein ist, dass sie bisher noch auf keine Weise hat gemessen werden können. Die Versuche von Wheatstone über die Ungleichzeitigkeit der Funken, welche an verschiedenen Stellen eines unterbrochenen Leitungsdrahts hervorgebracht werden, wenn die in zwei Conductoren angesammelten positiven und negativen Elektricitäten durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen, geben ebenfalls über die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida sich bewegen, keine Auskunft, sondern nur über die Fortpflanzung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium im Leitungsdrahte; denn das Erscheinen des Funkens setzt voraus, dass das an der betreffenden Stelle befindliche neutrale elektrische Medium in Bewegung gesetzt worden ist; setzt aber keineswegs voraus, dass die in den beiden Conductoren zuvor angesammelte positive oder negative Elektricität selbst durch den Leitungsdraht bis zu dieser Stelle hin gedrungen sei. Die von Wheatstone beobachtete Ungleichzeitigkeit der Funken an verschiedenen Unterbrechungstellen des Leitungsdrahts kann daher nur Aufschluss geben über die Geschwindigkeit der Verbreitung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium in den dazwischen liegenden Theilen des Leitungsdrahts. Auch in einer ge-

für $n = 4$:

$$e_1 = 0,004537 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,004744 \cdot 4rra$$

$$e_3 = 0,008570 \cdot 4rra$$

$$e_4 = 0,015922 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{8} a$$

für $n = 8$:

$$e_1 = 0,0004582 \cdot 4rra$$

$$e_2 = 0,0004771 \cdot 4rra$$

$$e_3 = 0,0008047 \cdot 4rra$$

$$e_4 = 0,0011495 \cdot 4rra$$

$$e_5 = 0,0015271 \cdot 4rra$$

$$e_6 = 0,0019726 \cdot 4rra$$

$$e_7 = 0,0025951 \cdot 4rra$$

$$e_8 = 0,0041187 \cdot 4rra$$

$$k = \frac{1}{16} a.$$

Je grösser die Zahl n ist, desto mehr nähert sich der Werth von e_1 den Werthen

$$\frac{1}{3} e_2, \frac{1}{5} e_3, \dots$$

Vertheilt man nun die Massen $e_1, e_2 \dots e_m$, für welche die Abweichungen von den Massen $e_1, 3e_1, \dots (2m-1)e_1$ als unmerklich vernachlässigt werden dürfen, auf die m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$, in deren Mitte sie liegen, dem Abstände x vom Punkte A proportional, so ist, wenn b einen constanten Factor bezeichnet,

$$b \int_0^{\frac{m}{n}\pi r} x dx = \frac{1}{2} b \cdot \frac{m m \pi \pi r r}{n n} = e_1 + e_2 + \dots + e_m = m m e_1,$$

folglich

$$b = \frac{2nn}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1}{rr}$$

Nun war die elektromotorische Kraft der in der Mitte der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrirten Massen $e_1, e_2 \dots e_m$ im Punkte A , wenn der Kreisbogen $\frac{m}{n} \pi r$ so klein ist, dass seine Abweichung von der geraden Linie als unmerklich betrachtet werden darf,

$$\text{von } e_1 = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot e_1$$

$$\text{von } e_2 = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{9} e_2 = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{3} e_1$$

$$\text{von } e_m = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2} e_m = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot e_1$$

also die ganze von diesen m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) e_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) b.$$

Die elektromotorische Kraft dagegen, welche von der nämlichen, nach dem angegebenen Gesetze stetig auf den ganzen Bogen $\frac{m}{n} \pi r$ vertheilten Masse im Punkte A ausgeübt wird, wenn diese lineare Vertheilung nach Art. 30 die Stelle der wirklichen Vertheilung auf der Oberfläche eines dünnen Drahts von dem Halbmesser α vertritt, wird gefunden

$$b \int_{\frac{e\alpha}{2}}^{\frac{m}{n} \pi r} \frac{dx}{x} = b \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}.$$

Diese beiden Ausdrücke für die von den m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft sind gleich, wenn α einen solchen Werth erhält, dass

$$2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) = \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}$$

d. i.

$$e\alpha = \frac{2m}{n} \pi r e^{-2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right)}$$

ist, worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Je grösser die Zahl n und folglich auch die Zahl m ist, desto geringer ist der Einfluss, welchen es auf den Werth von α hat, ob die Zahl m um einen oder einige Einheiten grösser oder kleiner genommen wird. Denn bezeichnet m eine grössere Zahl und α' den Werth, welchen α erhält, wenn m um 1 vergrössert wird, so lässt sich α' darstellen durch $\frac{2m^2 + 3m + 1}{2m^2 + 3m} \cdot \alpha$, was für grosse Werthe von m nur wenig von α verschieden ist. Für diesen Werth von α können also die in den Mittelpunkten der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrirten Massen freier Elektrizität an die Stelle einer gleich grossen, an der Oberfläche des Leiters stetig vertheilten Masse gesetzt werden; denn für den dem betrachteten Punkte zunächst liegenden Theil der Kette folgt dies aus der eben nachgewiesenen Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, für die ferneren Theile der Kette leuchtet es aber eben so wie Art. 30 von selbst ein.

Für den oben betrachteten Fall, wenn $n = 8$ ist, sieht man leicht, dass m nicht grösser als 2 genommen werden kann; folglich

$$e\alpha = \frac{1}{2} \pi r e^{-\frac{5}{3}} = 0,40945 \cdot r.$$

Dieser Werth von α ist nun allerdings, weil so kleine Werthe von n und m ihm zu Grunde gelegt worden, nicht als genau zu betrachten und ergibt sich ausserdem zu gross, als dass die Art. 30 entwickelten Regeln, welche nur für kleine Werthe von α gelten, mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden könnten. Eine genauere Anwendung dieser Regeln würde fordern, dass n nicht kleiner als 32 wäre, wo, wenn man $m = 4$ annähme,

$$e\alpha = \frac{1}{4} \pi r e^{-\frac{352}{405}} = 0,02749 \cdot r$$

erhalten würde. Der vorliegende Fall möge daher nur zur Erläuterung dienen, wie auf dem angegebenen Wege, trotz der Ungenauigkeit und der Grösse von α , die Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die daraus resultierende elektromotorische Kraft doch einigermaßen näherungsweise bestimmt werde. Ausser dem Werthe von $e\alpha$

$$e\alpha = 0,10945 \cdot r$$

erhält man nämlich für diesen Fall

$$b = \frac{32}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1 + e_2}{rr} = 0,008239 \cdot a$$

und die in der ganzen Kette gleiche elektromotorische Kraft

$$k = \frac{1}{16} a.$$

Diese Resultate lassen sich nur mit den S. 285 gegebenen Formeln vergleichen, wonach dieselbe elektromotorische Kraft näherungsweise durch folgende beide Ausdrücke dargestellt werden soll, nämlich durch

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right)$$

oder durch

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right)$$

wobei zu beachten ist, dass dort das Massenelement der freien Elektricität in dem Bogenelemente $rd\varphi$, welches in einer kleinen Entfernung $r\varphi$ vom Indifferenzpunkte A sich befindet, durch $a\varphi d\varphi$ ausgedrückt worden ist, während hier dasselbe Massenelement mit $bxdx$ bezeichnet wurde, wo $x = r\varphi$ und $dx = rd\varphi$ ist: es ist also in diesen beiden Formeln $a = brr$ zu setzen. Hiernach ergibt sich nun näherungsweise entweder

$$k = 2b \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{1}{2} \pi \right) = 0,04488 \cdot a$$

oder

$$k = 2b \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{2}{5} \pi \right) = 0,05006 \cdot a$$

statt oben $k = \frac{1}{16} a = 0,0625 \cdot a$ gefunden worden ist. Man sieht also hieraus, dass, wenn der oben berechnete Werth von k mit den beiden letzteren Näherungswerthen auch nicht genau übereinstimmt, was bei der Ungenauigkeit und Grösse des Werths von α unmöglich ist, jener Weg doch selbst unter diesen ungünstigen Verhältnissen wenigstens zu einem Werthe für k von gleicher Grössenordnung führt. Eine grössere Uebereinstimmung darf erwartet werden, wenn die Rechnung z. B. für $n = 32$ oder für noch grössere Zahlen ausgeführt würde. Durch eine angemessene Vergrösserung der Zahlen n und m würde sich die Vertheilung der freien Elektricität in dem linearen Leiter sowohl, als auch die davon abhängige elektromotorische Kraft näherungsweise mit jeder verlangten Schärfe bestimmen lassen.

Es ist übrigens kaum nöthig, besonders zu bemerken, dass in obiger Darstellung die Kreisform des Leiters nur beispielsweise zur Vereinfachung der Rechnung gewählt worden ist, dass aber dieselbe Methode für jede andere lineare Form des Leiters anwendbar bleibt. Dasselbe gilt auch, wenn statt einer elektromotorischen Kraft mehrere solche Kräfte an verschiedenen Stellen des Leiters gegeben sind, oder wenn der Leiter in Abtheilungen von verschiedenem specifischen Widerstande zerfällt, und daher eine ungleichförmige Vertheilung der elektromotorischen Kraft nach Proportion dieses Widerstandes stattfinden muss. Ueberhaupt ist die Anwendung dieser Methode, abgesehen von dem Umfange der Rechnung, nur dadurch beschränkt, dass lineare Leiter vorausgesetzt werden.

32.

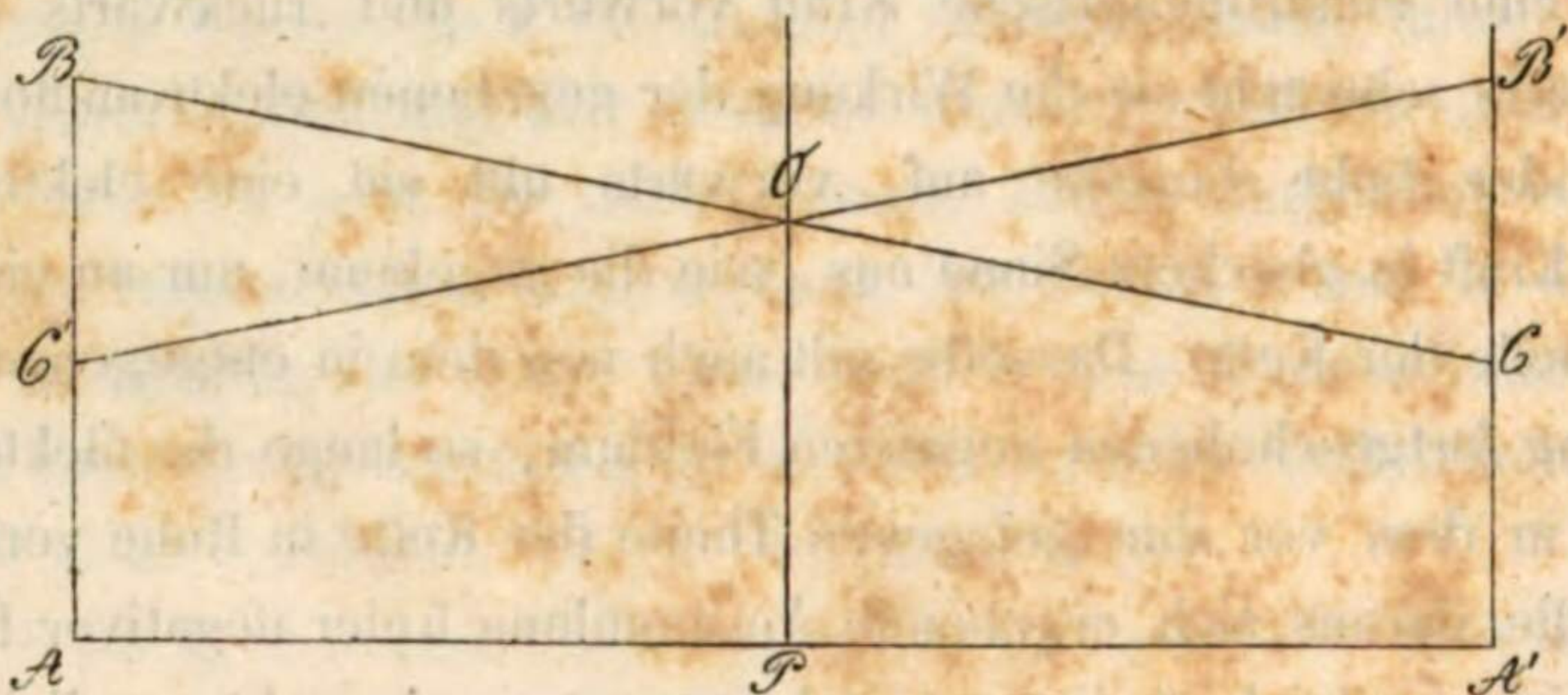
Nachweisung, wie die zu einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nothwendige Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des geschlossenen Leiters entstehe.

Es leuchtet ein, dass, wenn nur in einzelnen Punkten einer geschlossenen Kette elektromotorische Kräfte gegeben sind, unmittelbar nur in diesen Punkten eine elektrische Strömung beginnen kann und nicht in der ganzen Kette; denn in allen denjenigen Theilen der Kette, auf welche keine elektromotorischen Kräfte wirken, werden die elektrischen Fluida auch nicht bewegt. Beginnen aber die elektrischen Fluida an den Stellen, wo elektromotorische Kräfte gegeben sind, sich zu be-

wegen, und zwar das positive Fluidum nach der einen Richtung, das negative nach der entgegengesetzten Richtung, während die Fluida vor ihnen noch in Ruhe beharren, so wird durch dieses Fortschieben des positiven Fluidums nach der einen Seite zu auf dieser Seite eine Ansammlung von freier positiver Elektricität hervorgebracht, welche sogleich eine elektromotorische Kraft vorwärts und rückwärts ausübt. Rückwärts schwächt sie die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft oder hebt dieselbe auf, vorwärts übt sie eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Dasselbe gilt auch von dem in entgegengesetzter Richtung fortgeschobenen negativen Fluidum, so lange die elektrischen Fluida in dem vor ihm gelegenen Theile der Kette in Ruhe verharren. Auch die daraus sich ergebende Ansammlung freier negativer Elektricität wirkt sogleich rückwärts und vorwärts, schwächt nämlich rückwärts die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft und übt vorwärts eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Setzt man diese Betrachtung fort, so übersieht man im Allgemeinen, dass nur bei einem gleichförmigen Strome in allen Theilen der Kette diese Ansammlungen freier Elektricität zu wachsen aufhören und stationär werden können, und dass jede Abweichung von der Gleichförmigkeit des Stroms unmittelbar eine Veränderung in diesen Ansammlungen mit sich führt, welche so lange zunimmt, bis die Ungleichförmigkeit des Stroms wieder verschwunden ist.

Die Art. 29, 30 erörterte Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters ist nun zwar der Art, dass kein Gleichgewicht der vertheilten freien Elektricität dabei bestehen kann; denn dazu wäre nöthig, dass die Resultante aller Kräfte, welche ein Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche von allen übrigen erleidet, gegen die Oberfläche senkrecht und nach aussen gerichtet wäre, was nicht der Fall ist. Denn aus der Art. 29 gegebenen Darstellung erhellt von selbst, dass ausser einer gegen die Oberfläche senkrechten, nach aussen gerichteten Kraft noch eine tangentielle Kraft für jedes Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche resultiere, woraus folgt, dass diese freie Elektricität an der Oberfläche nicht in Ruhe beharren könne, sondern an der Strömung, welche im Innern stattfindet, Antheil nehmen müsse. Diese Theilnahme der freien Elektricität der Oberfläche an der Strö-

mung im Innern kann aber mit einer unveränderten Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters wohl bestehen. Denn stellt man die Vertheilung aller strömenden positiven Elektricität, am Rande und im Innern, für den zu einer geraden Linie ausgestreckt gedachten Leiter AA' durch die Ordinaten einer anderen geraden



Linie BC dar und eben so die Vertheilung aller strömenden negativen Elektricität durch die Ordinaten einer dritten geraden Linie $B'C'$, welche die Linie BC in O schneidet, so sind nach dieser Darstellung im Querschnitt OP beide Fluida in gleicher Menge vorhanden; von P nach A zu wächst aber der Ueberschuss an positiver Elektricität proportional mit dem Abstände von P ; von P nach A' zu wächst der Ueberschuss an negativer Elektricität ebenfalls proportional mit dem Abstände von P . Die allgemeine Strömung wird alsdann durch ein gleich schnelles Fortrücken der Linien BC und $B'C'$ in entgegengesetzter Richtung parallel mit AA' dargestellt, woraus sich leicht ergibt, dass die Ordinate des Schnidungspunktes beider Linien PO , d. h. der Indifferenzpunkt der Kette, unverrückt bleibt und dass auch durch dieses Fortrücken das Wachsthum des Ueberschusses an einer von beiden Elektricitäten mit dem Abstände von P unverändert bleibt, wenn nur vorausgesetzt werden darf, dass in den Kontaktpunkten A, A' die fortgerückte Elektricität durch neu geschiedene immer so ersetzt wird, dass die fortgerückten Geraden BC und $B'C'$ rückwärts immer so weit verlängert werden, dass sie bis zu den Ordinaten der Punkte A, A' sich erstrecken. Nach dieser bildlichen Darstellung könnte es scheinen, als wenn die Menge der zwischen A und A' strömenden Elektricität immer grösser würde. Dies kommt daher, weil dabei die in A und A' immer neu geschiedene und nach entgegengesetzten Seiten bewegte Elektricität in Rechnung gebracht ist, während auf die zwischen A und A' durch Wieder-

vereinigung zur Ruhe kommenden Elektricität keine Rücksicht genommen ist. Diese allmähliche Wiedervereinigung beider elektrischen Fluida zwischen A und A' lässt sich aber auch leicht bildlich darstellen durch ein Fortrücken der Abscissenlinie nach oben, welches mit solcher Geschwindigkeit geschehen kann, dass die Ordinate PO immer gleiche Länge behält, wodurch ausgedrückt wird, dass die Menge der daselbst befindlichen positiven und negativen Elektricität unverändert bleibt.

In dieser Darstellung ist das Ohm'sche Gesetz der Proportionalität für die Ladung der Kette angenommen. Sollte auf die in den vorhergehenden Artikeln erörterte Abweichung von diesem Gesetze Rücksicht genommen werden, so müsste zugleich auch der Unterschied der Geschwindigkeit in Rechnung gebracht werden, mit welcher die beiden Elektricitäten strömen müssen, wenn, bei einem vorhandenen Überschuss der einen, gleiche Quantitäten von beiden durch den Querschnitt gehen sollen. Auch dürfte dann, bei genauerer Erörterung, das elektrostatische Princip, welches hier der Einfachheit wegen zum Grunde gelegt worden ist, nicht mehr genügend befunden und daher das Zurückgehen auf das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung für nothwendig erachtet werden.

33.

Während des Drucks dieser Abhandlung ist in Poggendorffs Annalen Bd. 79. S. 506 eine von Herrn Dr. Kirchhoff der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gemachte Mittheilung erschienen: „Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst“, worin die Principien, auf welchen auch die vorhergehenden Erörterungen beruhen, einer genaueren Prüfung unterworfen worden sind. Insbesondere ist gezeigt worden, dass die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette in keinem nothwendigen Zusammenhange mit der von Ohm bei ihrer Ableitung, im Widerspruche mit dem elektrostatischen Grundgesetze, gemachten Voraussetzung stehen, dass die Elektricität in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn sie den Rauminhalt desselben mit gleichmässiger Dichtigkeit erfülle; dass vielmehr die Ableitung jener Gesetze unverändert bleibe, wenn man statt jener mit dem elektrostatischen Grundgesetze in Widerspruch stehenden Voraussetzung eine andere damit übereinstimmende

und daraus mit Nothwendigkeit resultierende substituiert, nämlich dass das neutrale elektrische Fluidum in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn das Potential der an seiner Oberfläche vertheilten freien Elektrizität im Innern des Leiters überall gleichen Werth hat, und wenn man, im Verlaufe der Ableitung, im Innern des Leiters den Potentialwerth der freien, an der Oberfläche befindlichen Elektrizität für die Dichtigkeit der Elektrizität setzt, welche nach Ohm im Innern des Leiters selbst stattfinden soll. Die von Kirchhoff hiervon gegebene Nachweisung ist so kurz gefasst, dass sie keinen Auszug gestattet, und es muss deshalb auf das Original selbst verwiesen werden. Es möge daraus nur die Schlussbemerkung angeführt werden, welche Kirchhoff beigefügt hat, durch die er die Zurückführung der Gesetze der galvanischen Kette auf das Grundgesetz der Elektrostatik zu rechtfertigen sucht, da doch die Gesetze der galvanischen Kette elektrodynamische Erscheinungen betreffen, zu deren Erklärung sonst das elektrostatische Grundgesetz im Allgemeinen nicht genügt. Es heisst a. a. O. S. 542:

«Den durchgeführten Betrachtungen liegt das elektrostatische Gesetz der Wirkung elektrischer Theilchen zu Grunde. Aus diesem Gesetze lassen sich die Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen und die Inductionsercheinungen nicht erklären; Weber hat ein allgemeineres Gesetz gefunden, durch welches es ihm gelungen ist, jene Erscheinungen zu erklären, ein Gesetz, in dessen Ausdruck die relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren Wirkung auf einander betrachtet wird, vorkommt, und das in das elektrostatische übergeht, wenn diese Geschwindigkeit verschwindet. Um die verschiedenen Felder der Elektrizitätslehre unter einen Gesichtspunkt zu bringen, muss man sich daher die Aufgabe stellen, die Gesetze der Strömungen in der geschlossenen Kette aus dem Weber'schen Gesetze abzuleiten. Diese Herleitung scheint schwer zu sein, doch ist es leicht, *a posteriori* zu beweisen, dass die Vorstellung von den Strömungen, zu denen die Annahme des elektrostatischen Gesetzes geführt hat, auch mit dem Weber'schen Gesetze in Einklang ist, wenn man noch eine gewisse Hypothese zu Hülfe nimmt, die Hypothese nämlich, dass bei der Berechnung der Kraft, welche eine Scheidung der beiden Elektrizitäten in dem Raumelemente v eines der Leiter hervorbringt, die Elektrizitäten in v als ruhend angesehen werden müssen. Diese Annahme hat nichts Widerstrebendes,

wenn man sich vorstellt, dass die Bewegung der Elektricität in einem Leiter nur von Molecül zu Molecül vor sich geht, so dass jedes Elektricitätstheilchen bei einem Molecüle, bei dem es ankommt, einen Ruhepunkt findet. Bei dieser Vorstellung kann man leicht zugeben, dass die Elektricitätsmenge, die von einem Molecüle zu einem benachbarten übergeführt wird, nur durch die Kräfte bedingt wird, die auf die Elektricitätstheilchen ausgeübt werden, während sie noch an jenem Molecül sich in Ruhe befinden, nicht aber durch die Kräfte, die auf sie wirken, während sie schon auf dem Wege zum folgenden Molecül sind. In Bezug auf die Theorie der Induction, die Weber gegeben hat, ist es gleichgültig, ob man diese Annahme macht oder nicht. Macht man dieselbe und denkt sich übrigens die Strömungen in der Kette so, wie sie die Voraussetzung des elektrostatischen Gesetzes ergeben hat, so ist es, in Bezug auf die Grösse und die Richtung der Kraft, welche die Elektricitäten in dem Elemente v zu scheiden strebt, — also in Bezug auf die elektromotorische Kraft, wie Weber sie nennt, — gleichgültig, ob man von dem elektrostatischen oder dem Weber'schen Gesetze ausgeht. Der Unterschied, der möglich wäre, müsste nämlich herrühren von den Kräften, welche die in den andern Theilen des Systems strömenden Elektricitäten ausüben, und diese Kräfte tragen nach Dem, was Weber bewiesen hat, zu jener elektromotorischen Kraft nichts bei, da die Strömungen constant sind und gleiche Mengen der beiden Elektricitäten nach entgegengesetzten Richtungen mit derselben Geschwindigkeit führen.»

34.

Durch Vergleichung elektromotorischer und galvanometrischer Beobachtungen der galvanischen Kette diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischer Massen zu bestimmen, bei welcher weder Anziehung noch Abstossung stattfindet.

Ist das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms gegeben, so lässt sich darauf eine für die Elektricitätslehre im Allgemeinen wichtige Anwendung gründen. Es leuchtet nämlich ein, dass alsdann die elektromotorische Kraft einer Kette auf doppelte Weise bestimmt werden kann, nämlich erstens aus ihrer Wirkung, d. h. aus der Inten-

sität des von ihr bei einem bekannten Widerstande der Kette hervor-
gebrachten Stroms. Hierdurch wird die Bestimmung der elektromoto-
rischen Kraft von den Messungen der Stromintensität und des Wider-
stands der Kette abhängig gemacht, welche beide, wie in dieser
Abhandlung gezeigt worden ist, nach absoluten Maassen ausführbar
sind. Zweitens kann sie aus ihrer Ursache bestimmt werden,
d. h. aus der auf der Oberfläche des Leiters vertheilten freien Elektri-
cität. Sind die Stromintensität i und der Widerstand der Kette w nach
den Art. 26 definierten Maassen gefunden, so wird die elektromoto-
rische Kraft der ganzen Kette nach dem dort angegebenen Maasse
durch das Produkt

$$iw$$

bestimmt, und dieser Werth kann nach Art. 27 durch Multiplication
mit $\frac{4}{c}$ auf das allgemeine Kraftmaass der Mechanik reduciert werden,
wo c die relative Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher zwei elek-
trische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie ein-
ander weder anziehen noch abstossen sollen. Die elektromotorische
Kraft der ganzen Kette ist also nach dem allgemeinen Kraftmaasse der
Mechanik, aus ihrer Wirkung berechnet,

$$= \frac{4}{c} iw.$$

Zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft derselben Kette aus ihrer
Ursache möge nun der im 30. Artikel gefundene Ausdruck

$$\frac{2a}{rr} \left(\log \cot \frac{ea}{sr} - \beta \pi \right)$$

zum Grunde gelegt werden, worin β einen kleineren Werth als $\frac{1}{2}$ und
einen grösseren als $\frac{2}{3}$ hat. Nach Seite 281 bezeichnet hierin a denjeni-
gen Factor, welcher mit $(\varphi - \pi)d\varphi$ multipliciert die Masse der freien
Elektricität giebt, welche auf dem Längenelemente der Kette $rd\varphi$ am
Ende des Bogens $r\varphi$ vertheilt ist. Ist nun die Masse der freien Elektri-
cität zweier Elemente der Kette von der Länge dx , das eine am Ende
des Bogens $\pi - \chi$, das andere am Ende des Bogens $\pi + \chi$ wirklich
gemessen und erstere $= Edx$, letztere $= E'dx$ gefunden, so ist

$$Edx = - a\chi d\chi$$

$$E'dx = + a\chi d\chi$$

und $rd\chi = dx$ zu setzen; folglich

$$a = -\frac{r}{2\chi} (E' - E).$$

Setzt man nun diesen Werth für a in obigen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{E' - E}{rz} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta \pi \right).$$

Dieser Ausdruck giebt aber nicht die elektromotorische Kraft für die ganze Länge der Kette, sondern nur für ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette und muss mit der Länge der Kette $= 2\pi r$ multipliciert werden, wenn die elektromotorische Kraft der ganzen Kette erhalten werden soll, nämlich:

$$\frac{2\pi}{z} (E' - E) \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta \pi \right).$$

Hiernach ergibt sich nun endlich durch Gleichsetzung der nach beiden Methoden bestimmten elektromotorischen Kraft der ganzen Kette folgende Gleichung:

$$\frac{4}{c} iw = \frac{2\pi}{z} (E' - E) \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta \pi \right)$$

oder

$$c = \frac{2z}{\pi} \frac{iw}{E' - E} \cdot \frac{1}{\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta \pi}.$$

Es ist also hierdurch diejenige Geschwindigkeit c bestimmt, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie einander weder abstossen noch anziehen sollen. Aus dem Grundgesetze der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, wie es in der ersten Abhandlung über «Elektrodynamische Maassbestimmungen» ausgesprochen worden ist, so wie aus Art. 27 in dieser Abhandlung, wo gezeigt worden ist, dass, wenn diese Geschwindigkeit c bekannt ist, alle elektromotorischen Kräfte nach dem in der Mechanik festgesetzten Kraftmaasse ausgedrückt werden können, leuchtet die Wichtigkeit der Bestimmung dieser Geschwindigkeit c von selbst ein. Bei dieser Bedeutung von c ist es aber selbst schon von Interesse, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung nachzuweisen, auch wenn die wirkliche Ausführung auf Hindernisse stossen sollte, welche noch nicht überwunden werden könnten, weil es dazu noch an den geeigneten Instrumenten fehlt. In der That dürften jetzt noch solche Hindernisse der Ausführung der feinen elektrometrischen Messungen entgegenstehen, durch welche die Grössen E' und E gefunden werden sollen. Alle unsere jetzigen Elektroskope und Elektrometer scheinen zur Ausführung dieser Messungen nicht geeignet: es würde damit nur möglich sein, das Verhältniss der Grössen E und E' zu bestimmen, aber nicht ihren absoluten Werth, wenigstens ist bisher kein Versuch dieser Art damit ge-

macht worden. Die Construction neuer Elektroskope und Elektrometer, welche dazu geeigneter wären, bildet aber eine Aufgabe für sich, mit der wir uns hier nicht beschäftigen, weil wir uns in dieser Abhandlung nur auf elektrodynamische Maassbestimmungen beschränken.*

35.

Ueber das Verhältniss der Geschwindigkeit der Strömung zur Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Stroms.

Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida selbst in den Leitern sich bewegen, liegen noch gar keine Data vor. Man weiss nur, dass die Geschwindigkeit, mit welcher manche elektrische Phänomene, wie der Blitz, sich verbreiten, sehr gross sein müsse, da auch ihre Verbreitung durch die grössten Räume nicht den kleinsten messbaren Zeitraum erfordert. Eben so weiss man nur, dass die Verbreitung eines galvanischen Stroms durch eine lange Kette mit ausserordentlicher Geschwindigkeit geschehe, weil die Zeit, welche erfordert wird, bis ein an einer bestimmten Stelle der Kette erregter Strom in allen Theilen der Kette gleiche Intensität erlangt, so klein ist, dass sie bisher noch auf keine Weise hat gemessen werden können. Die Versuche von Wheatstone über die Ungleichzeitigkeit der Funken, welche an verschiedenen Stellen eines unterbrochenen Leitungsdrahts hervorgebracht werden, wenn die in zwei Conductoren angesammelten positiven und negativen Elektricitäten durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen, geben ebenfalls über die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida sich bewegen, keine Auskunft, sondern nur über die Fortpflanzung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium im Leitungsdrahte; denn das Erscheinen des Funkens setzt voraus, dass das an der betreffenden Stelle befindliche neutrale elektrische Medium in Bewegung gesetzt worden ist; setzt aber keineswegs voraus, dass die in den beiden Conductoren zuvor angesammelte positive oder negative Elektricität selbst durch den Leitungsdraht bis zu dieser Stelle hin gedrungen sei. Die von Wheatstone beobachtete Ungleichzeitigkeit der Funken an verschiedenen Unterbrechungstellen des Leitungsdrahts kann daher nur Aufschluss geben über die Geschwindigkeit der Verbreitung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium in den dazwischen liegenden Theilen des Leitungsdrahts. Auch in einer ge-

lossenen und nirgends unterbrochenen Kette, worin durch elektromotorische Kräfte das Gleichgewicht der elektrischen Fluida fortwährend gestört wird, müssen zweierlei Geschwindigkeiten unterschieden werden, nämlich die einer von Theilchen zu Theilchen fortgepflanzten Bewegung und die einer jedem Theilchen eigenthümlichen Bewegung: erstere heisst die Geschwindigkeit der Stromverbreitung, die letztere heisst die Stromgeschwindigkeit. Bei beharrlichen Ströme in einer homogenen Kette ist die Stromgeschwindigkeit überall gleich. Ein solcher Strom heisst ein gleichförmiger, weil er sich durch die ganze Kette gleichförmig verbreitet hat, und so lange er unverändert fortdauert, ist von keiner anderen Stromverbreitung mehr die Rede. Soll von einer ungleichförmigen Stromverbreitung wieder die Rede sein, so muss irgend eine Veränderung mit dem Ströme vorgehen: der Strom muss stärker oder schwächer werden. Es fragt sich dann, ob jede Aenderung in der Stromstärke des Stroms, d. i. jede Aenderung in der Stromgeschwindigkeit, in allen Theilen der Kette gleichzeitig oder allmählig, in einem Theile nach dem andern, eintritt. Im erstern Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Kette, die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei unmessbar; im andern Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit endlicher Geschwindigkeit durch die Kette, oder die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei messbar. Es geht hieraus hervor, dass die Messung der Geschwindigkeit der Stromverbreitung eine Veränderung oder Wechsel der Stromstärke in der Kette voraussetze, ohne welche von solcher Messung gar nicht die Rede sein kann.

Wie dies nun schon S. 273 an einem Beispiele erläutert worden, sind Aenderungen der Stromstärke oder der Stromgeschwindigkeit, die That möglich sind, welche in allen Theilen der Kette gleichzeitig eintreten, nämlich wenn die gegebenen elektromotorischen Kräfte, die Aenderung verursachen, auf alle Theile der Kette unmittelbar in der Proportion ihres Widerstands, wirken. Ein solcher besondrer Fall beweist aber die Unmessbarkeit der Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen noch nicht. Sollte die Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen unmessbar genannt werden, so ist diese Gleichzeitigkeit der Stromänderung in allen Theilen der Kette in allen Fällen stattfinden, insbesondere auch dann, wenn die

gegebene elektromotorische Kraft, welche die Aenderung verursacht. unmittelbar nur auf einen Theil der Kette wirkt. Für diesen Fall ergibt sich aber aus dem in den vorhergehenden Artikeln erörterten Zusammenhange der Gesetze der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen, dass die veränderte Stromgeschwindigkeit in demjenigen Theile der Kette, wo sie durch die gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar hervorgebracht wurde, einige Zeit gedauert haben müsse, ehe sie in anderen Theilen der Kette eintreten könne, nämlich darum, weil dem Eintritt dieser Stromänderung in andern Theilen der Kette nothwendig eine neue Ansammlung freier Elektrizität vorangegangen sein muss, welche auf diese Theile der Kette eine elektromotorische Kraft ausübt, welche zur Hervorbringung der Stromänderung in diesen Theilen nothwendig ist. Diese neue Ansammlung freier Elektrizität kann aber nur durch die Stromänderung in einem Theile der Kette in derjenigen Zeit hervorgebracht werden, in welcher in den übrigen Theilen der Kette diese Stromveränderung noch nicht stattgefunden hat. Es ergibt sich also hieraus, dass die durch eine gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar nur an einer Stelle der Kette hervorgebrachte Stromänderung unmöglich in allen andern Theilen der Kette ganz gleichzeitig eintreten könne, sondern sie kann nur allmählig in einem Theile nach dem andern entstehen, nachdem die zu ihrer Hervorbringung in jedem Theile nothwendige Ansammlung freier Elektrizität sich vorher gebildet hat.

Hält man sich z. B. der Einfachheit wegen an die näherungsweise zulässige Ohm'sche Hypothese von der Vertheilung der freien Elektrizität im Leiter, wonach die freie Elektrizität des Längenelements der Kette $rd\varphi$ am Ende des Bogens φ durch $a(\varphi - \pi)d\varphi$ dargestellt wird, so ergibt sich hieraus für die freie negative Elektrizität der einen Hälfte des kreisförmigen Leiters der Integralwerth

$$= a \int_0^{\pi} (\varphi - \pi) d\varphi = - \frac{\pi\pi}{2} a,$$

für die freie positive Elektrizität der anderen Hälfte der Integralwerth

$$= a \int_{\pi}^{2\pi} (\varphi - \pi) d\varphi = + \frac{\pi\pi}{2} a,$$

worin nach S. 296

$$a = \frac{r}{2\chi} (E' - E)$$

ist, wenn $E dx$ die Masse der freien Elektricität des Längenelements dx am Ende des Bogens $r(\pi - \chi)$, $E' dx$ die Masse der freien Elektricität eines gleich langen Elements dx am Ende des Bogens $r(\pi + \chi)$ bezeichnet. Die Länge des zwischen diesen beiden Elementen liegenden Stücks der Kette ist folglich $= 2r\chi$. Bezeichnet man nun die Masse der freien Elektricität zweier eben solcher Elemente dx , zwischen denen aber nur ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette liegt, mit εdx und $\varepsilon' dx$, so erhält man

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{E' - E}{2r\chi},$$

folglich

$$a = rr(\varepsilon' - \varepsilon),$$

und setzt man diesen Werth von a in den obigen Ausdruck des Integralwerthes der freien negativen und positiven Elektricität, so erhält man dafür

$$- \frac{\pi\pi rr}{2} (\varepsilon' - \varepsilon) \text{ und } + \frac{\pi\pi rr}{2} (\varepsilon' - \varepsilon).$$

Die hieraus resultierende elektromotorische Kraft ist nach S. 297

$$\frac{2\pi}{\chi} (E' - E) \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right) = 4\pi r (\varepsilon' - \varepsilon) \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right).$$

Bezeichnet man den Widerstand des Leiters für die Einheit der Länge und des Querschnitts, nach dem Art. 27 festgesetzten Maasse, mit k und folglich den Widerstand der ganzen Kette, deren Länge $= 2\pi r$ und deren Querschnitt $= \pi\alpha\alpha$ ist, durch $\frac{2r}{\alpha\alpha} k$; so stellt der Quotient jener elektromotorischen Kraft und dieses Widerstands die Stromintensität eu dar, wo e die Masse der in einem dem Längenmaasse gleichen Stücke der Kette enthaltenen positiven oder negativen Elektricität und u die Stromgeschwindigkeit bezeichnet, folglich

$$4\pi r (\varepsilon' - \varepsilon) \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right) = \frac{2r}{\alpha\alpha} k \cdot eu.$$

Soll nun in dieser Kette die Stromintensität eu in dem Verhältniss von $1 : n$ sich ändern, so muss neu an die Stelle von eu treten, folglich auch $n(\varepsilon' - \varepsilon)$ an die Stelle von $(\varepsilon' - \varepsilon)$, wodurch der Integralwerth der freien negativen und positiven Elektricität folgenden Ausdruck erhält:

$$- \frac{\pi\pi rr}{2} \cdot n(\varepsilon' - \varepsilon) \text{ und } + \frac{\pi\pi rr}{2} \cdot n(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Die Aenderung dieses Integralwerths ergibt sich hieraus

$$= - \frac{\pi \pi r r}{2} (n - 1) (\varepsilon' - \varepsilon) \text{ und } = + \frac{\pi \pi r r}{2} (n - 1) (\varepsilon' - \varepsilon).$$

Die Möglichkeit dieser Aenderung setzt aber voraus, dass die Zunahme der Stromgeschwindigkeit $= (n - 1)u$ am Anfange der Kette, wo die Verstärkung der elektromotorischen Kraft stattfindet, durch welche die Aenderung der Stromintensität bewerkstelligt wird, früher eintrete, als in der Mitte der Kette, welche von dieser Stelle am weitesten entfernt ist, und zwar um einen Zeitraum T , in welchem in Folge der Geschwindigkeitsänderung $(n - 1)u$ durch den Querschnitt der Kette eine Masse negativer oder positiver Elektrizität $= (n - 1)eu \cdot T$ geht, welche der obigen Aenderung des Integralwerths gleich ist, woraus folgende Gleichung sich ergibt:

$$\frac{\pi \pi r r}{2} (n - 1) (\varepsilon' - \varepsilon) = (n - 1) eu \cdot T.$$

Hieraus folgt, mit Zuziehung der vorher gefundenen Gleichung

$$4\pi r (\varepsilon' - \varepsilon) \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta\pi \right) = \frac{2r}{aa} k \cdot eu,$$

der Zeitraum T

$$T = \frac{\pi \pi r r}{2} \cdot \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{eu} = \frac{\pi r r}{4aa} \frac{k}{\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta\pi}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass im ersten Augenblicke der Aenderung die Stromgeschwindigkeit im ersten Elemente der Kette sogleich von n zu nu übergehe und dass diese neue Stromgeschwindigkeit nu in diesem Elemente von dann an unverändert beharre. Unter der Voraussetzung, dass ein ähnlicher plötzlicher Uebergang der Stromgeschwindigkeit von u zu nu in allen Theilen der Kette stattfinde, lässt sich endlich die Geschwindigkeit der Stromverbreitung in jedem Theile der Kette bestimmen. Unter dieser Voraussetzung wird nämlich die Zeit t , in welcher der Strom durch ein dem Bogen $r\psi$ entsprechendes Stück der Kette fortgepflanzt wird, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$t = \frac{\psi \pi r r}{4\pi aa} \cdot \frac{k}{\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta\pi}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung in Beziehung auf t und ψ erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$,

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{2\pi aa}{kr\psi} \left(\log \cot \frac{ea}{8r} - \beta\pi \right),$$

wonach also diese Geschwindigkeit desto kleiner ist, je grösser das Stück $r\psi$ der Kette ist, durch welches sich die Stromänderung schon verbreitet hat.

In diesem Ausdrucke der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet k den Widerstand des Leiters für die Einheit seiner Länge und seines Querschnitts und zwar nach dem Art. 27 definierten Maasse. Bezeichnet man mit q den nach bekannten Methoden messbaren Widerstand desselben Leiters für dieselbe Länge und denselben Querschnitt nach dem Art. 26 definierten Maasse, so ist nach Art. 27

$$k = \frac{46}{cc} q,$$

und setzt man diesen Werth von k in die obige Gleichung, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$,

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{\pi cca\alpha}{8qr\psi} \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right),$$

woraus hervorgeht, dass, wenn die Geschwindigkeit c bekannt wäre, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie sich weder anziehen noch abstossen sollen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ daraus berechnet werden könnte, und dass umgekehrt, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ gemessen würde, jene Geschwindigkeit c sich daraus berechnen lassen würde. Könnten aber beide Geschwindigkeiten c und $\frac{rd\psi}{dt}$ aus unabhängigen Beobachtungen bestimmt werden, so würden dadurch die Mittel gewonnen, die Richtigkeit der obigen Gleichung an der Erfahrung zu prüfen. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ nicht bloss in verschiedenen Ketten, sondern auch an verschiedenen Stellen einer und derselben Kette verschieden ist; denn der Zahlencoefficient $\frac{1}{8} \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right)$ hat für verschiedene Ketten verschiedene Werthe, und in einer und derselben Kette, für welche der Zahlencoefficient $\frac{1}{8} \left(\log \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi \right) = n$ gegeben ist, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle der Kette dem Widerstande desjenigen Stücks $r\psi$ umgekehrt proportional, durch welches die Stromverbreitung von ihrem Ursprunge an bis dahin stattgefunden hat. Bezeichnet man diesen Widerstand nach dem Art. 26 definierten Maasse mit $w = \frac{r\psi}{\pi\alpha\alpha} \cdot q$, so ist $\frac{rd\psi}{dt} = n \cdot \frac{cc}{w}$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nimmt also ab, je weiter die Verbreitung von ihrem Ursprunge sich entfernt, und wird also in recht langen Ketten sich viel leichter messen lassen, als in kürzeren.

Was aber endlich die Stromgeschwindigkeit u betrifft, so sieht man

leicht, dass die Bestimmung derselben, abgesehen von den Hindernissen, welche die Ausführung der Messung der Geschwindigkeit c auf dem Art. 34 oder auf dem in diesem Artikel angegebenen Wege findet, vorzüglich an der gänzlichen Unkenntniss derjenigen Masse positiver oder negativer Elektricität $\pm e$ scheitert, welche in einem dem Längenmaasse gleichen Stücke des Leiters enthalten ist; denn zur Bestimmung des Products eu hat man nach Art. 27 die Gleichung

$$eu = \frac{c}{4} i,$$

wo i in bekannter Weise gemessen werden kann. Die Möglichkeit, über die Werthe von e und u einzeln Auskunft zu erhalten, würde, wie es scheint, darauf beruhen, dass der Widerstand eines Leiters, welcher bisher nur aus seinen Wirkungen definiert worden ist, nämlich aus der Abhängigkeit, in welcher bei einer gegebenen elektromotorischen Kraft die Stromintensität von ihm steht, auch aus seinen Ursachen näher definiert werden könnte. Gelänge es nämlich, die Ursachen des Widerstands in den Leitern zu erforschen, und ergäbe sich daraus zum Beispiel, dass der Widerstand eines Leiters von dem Werthe e , welcher dem Leiter zukommt, abhängig sei, und zwar, dass derselbe desto grösser oder kleiner sei, je kleiner oder grösser der Werth von e sei, und durch $\frac{d}{e}$ dargestellt werden könne, wo d unabhängig von e aus der sonstigen Beschaffenheit des Leiters bestimmt werde; so leuchtet ein, dass nach Art. 27 für i der Quotient der elektromotorischen Kraft $\frac{4}{c} \varepsilon$ (worin ε nach Art. 26 messbar ist) und des Widerstands $\frac{d}{e}$ gesetzt werden kann, folglich

$$eu = \frac{c}{4} i = \frac{\varepsilon}{d} e$$

also

$$u = \frac{\varepsilon}{d}.$$

Aus dieser Bestimmung von u würde dann zugleich auch der Werth von e sich ergeben. Es geht hieraus die Wichtigkeit hervor, welche eine nähere Nachforschung über die bisher noch nicht erörterten Ursachen des Widerstands für die Elektricitätslehre haben könnte.

36.

Ueber die Ursachen des Widerstands der Leiter.

Zu einer vollständigen Kenntniss des Widerstands genügt es nicht, die Grösse des Widerstands aus seinen Wirkungen zu definieren, d. i. aus der Stärke des durch eine gegebene elektromotorische Kraft her-

vorgebrachten Stroms, sondern es gehört auch dazu, die Grösse des Widerstands aus ihren Ursachen zu definieren. Ohne diese wesentliche Ergänzung ist unsere Kenntniss von dem Wesen des Widerstands mangelhaft, und die ermittelte Grösse desselben ist eine blossе Hilfsgrösse der Elektrodynamik, deren wahre physische Bedeutung noch unbekannt ist. Wenn nun der Widerstand bisher bloss nach seinen Wirkungen betrachtet worden ist, so liegt der Grund davon darin, dass über die Ursachen desselben bisher noch gar nichts Wesentliches ermittelt worden ist. Es ist bloss die Abhängigkeit des Widerstands von den äusseren Dimensionen des Leiters, nämlich von seiner Länge und von seinem Querschnitt, ermittelt worden, aber diese Abhängigkeit betrifft bloss den absoluten Widerstand eines Leitungsdrahts und hat keine Beziehung auf den specifischen Widerstand des leitenden Metalls, über dessen Ursachen gar nichts bekannt ist. Diese Ursachen scheinen so tief in der Natur der Körper verborgen zu liegen, dass sie auf den bisherigen Wegen der Forschung unzugänglich sind. Kurz, die Frage nach den Ursachen des galvanischen Widerstands führt zu einem noch ganz unangebauten Gebiete der Wissenschaft. Ich werde mich daher nur auf eine einzelne Erörterung beschränken, nämlich darüber, in welcher Beziehung dieser Widerstand mit der Natur der elektrischen Fluida selbst, wie dieselben definiert worden sind, und mit deren Verhalten im elektrischen Doppelstrome stehe, wie dasselbe nach der gewöhnlichen Vorstellung auch hier immer angenommen und festgehalten worden ist.

Die Frage nach den Ursachen des Widerstands lässt sich zunächst specieller darauf richten, in wie weit diese Ursachen in dem ponderablen Träger des Stroms, und in wie weit dieselben in den darin enthaltenen elektrischen Fluidis liegen. Dass die Gegenwart der ponderablen Theile die Canäle, durch welche die elektrischen Fluida strömen, mehr oder weniger beengen und dadurch auf die elektrische Strömung Einfluss haben können, leuchtet von selbst ein; es fragt sich aber, ob diese Ursache zur Erklärung des Widerstands allein schon genüge. Diese Ursache des Widerstands würde bloss die Masse des elektrischen Fluidums beschränken, welche an der Strömung Theil nehmen könnte. Es liegt aber in dem Wesen des Widerstands, wie wir ihn aus seinen Wirkungen kennen, dass durch die Grösse des Widerstands nicht bloss die Masse des elektrischen Fluidums beschränkt wird, welche an der Strombewegung Theil nimmt, sondern, dass auch die Bewegung selbst

beschränkt wird. Diese Beschränkung der Bewegung selbst kann aber ihren Grund in der blossen Gegenwart der ponderabelen Theile nicht haben, sondern setzt nothwendig Kräfte voraus, welche den fortwirkenden elektromotorischen Kräften der Kette das Gleichgewicht halten, weil ohnedem jene Kräfte die elektrischen Fluida in ihrer Bewegung immerfort beschleunigen müssten, was bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nicht der Fall ist.

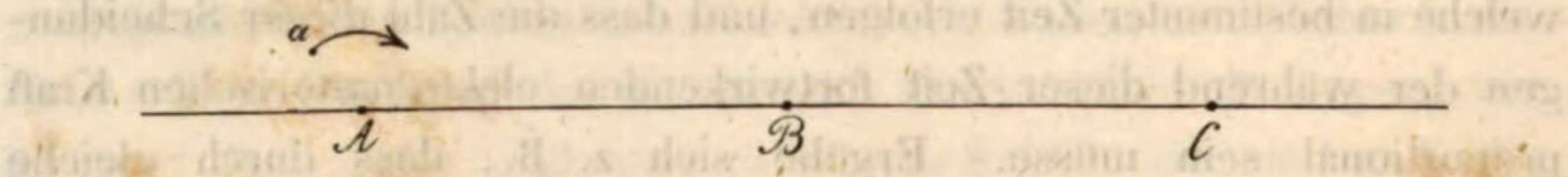
Es fragt sich also ferner, woher die Kräfte rühren, welche bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome den fortwirkenden elektromotorischen Kräften das Gleichgewicht halten und dadurch eine fernere Beschleunigung der elektrischen Fluida in ihrer Bewegung verhindern? Sind diese Kräfte rein elektrische Kräfte, oder sind es Kräfte, welche die ponderabelen Theile auf die elektrischen Fluida, die an ihnen vorbeigehen, ausüben? Setzen wir in dem galvanischen Strome, wie wir es stets gethan haben, zwei elektrische Fluida voraus, die gleichzeitig durch denselben Leiter in entgegengesetzten Richtungen strömen, so liegt es sehr nahe, eine Ursache des Widerstands für die Bewegung jedes Fluidums in dem ihm entgegenkommenden Fluidum zu suchen. Das positive und das negative Fluidum werden nämlich in dem Augenblicke der Begegnung sich zu neutralem Gemische verbinden, und so leicht auch diese neutrale Verbindung wieder zu scheiden sein möge, so wird doch eine solche neue Scheidung nur durch eine neue elektromotorische Kraft erfolgen können, und nicht in Folge einer Beharrung derjenigen Bewegungen, welche beide Fluida vor ihrer Vereinigung besaßen, weil diese durch ihre Begegnung und Verbindung mit einander als aufgehoben betrachtet werden muss. Es geht daraus hervor, dass während jedem Fluidum für sich bei seinen Bewegungen Beharrung zugeschrieben werden muss, beiden Fluidis zusammen bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt. Wenn aber auch dieser Grund, warum den elektrischen Fluidis bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt, der richtige ist, so gewinnt man doch dadurch noch keine deutliche Einsicht in den Hergang selbst, so lange die Kräfte unbekannt sind, welche die Verbindung und Vereinigung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung bewirken, und welche bei ihrer wiederholten Scheidung überwunden werden müssen. Es fragt sich, ob dabei noch andere Kräfte in Betracht kommen, als diejenigen, welche durch das allgemeine elektrische Grund-

gesetz schon bestimmt sind, z. B. ob dabei besondere Molecularkräfte der elektrischen Fluida wirksam sind. Wäre dies nicht der Fall, so müsste der Hergang bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome nach dem bekannten Grundgesetze der elektrischen Wirkung genauer bestimmt werden. Ohne eine solche genauere Bestimmung lässt sich im Allgemeinen nur mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die Intensität eines elektrischen Doppelstroms ausser von der Masse der elektrischen Fluida, welche an der Strömung Theil nimmt, von der Zahl der Scheidungen abhängt, welche in bestimmter Zeit erfolgen, und dass die Zahl dieser Scheidungen der während dieser Zeit fortwirkenden elektromotorischen Kraft proportional sein müsse. Ergäbe sich z. B., dass durch gleiche elektromotorische Kraft jedes elektrische Theilchen in gleicher Zeit immer eine gleiche Zahl Verbindungen und Scheidungen erlitte und dadurch eine gleiche Wegstrecke fortgeführt würde, so wäre die Stromgeschwindigkeit u für gleiche elektromotorische Kraft immer die nämliche, und es würde dann die Stromintensität für gleiche elektromotorische Kraft bloss mit der Menge der Elektrizität e variiren, welche auf einer solchen Wegstrecke (z. B. in der Längeneinheit des Leiters) enthalten wäre, und zwar proportional damit sein, woraus hervorginge, dass der sogenannte Widerstand gleichfalls nur mit e variirte und zwar dem Werthe von e umgekehrt proportional wäre, welches derjenige Fall ist, welcher am Ende des vorigen Artikels als Erläuterung angeführt wurde.

Sollte in der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung im Doppelstrome die Ursache des Widerstands wirklich enthalten sein, so würde daraus ferner die Unmöglichkeit eines beharrlichen Doppelstroms ohne fortwirkende äussere elektromotorische Kraft folgen, und es würde sich dann fragen, wie damit die Annahme von beharrlichen Molecularströmen zur Erklärung der magnetischen und diamagnetischen Erscheinungen verträglich wäre. Die Möglichkeit solcher Molecularströme müsste dann nothwendig auf einer Wirkung der ponderablen Molecule beruhen, durch welche die Bahnen der in entgegengesetzten Richtungen um jene Molecule sich bewegendenden elektrischen Fluida von einander getrennt erhalten würden, indem z. B. das eine Fluidum eine engere Kreisbahn, das andere Fluidum eine weitere Kreisbahn um das Mole-

cule beschriebe, sodass die beiden Fluida sich bei ihren Bewegungen nirgends begegnen und vereinigen könnten.

Zur Erläuterung des Hergangs bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome, wie er aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ohne Zuziehung besonderer Molecularkräfte dieser Fluida abzuleiten wäre, diene folgende Betrachtung. In $A, B, C \dots$ seien positiv elektrische Massen, von denen zunächst angenommen werden möge, dass sie an den Orten, wo sie sich befinden, festgehalten würden. In a befinde sich gegenwärtig eine



bewegliche negativ elektrische Masse, auf welche die benachbarte positive Masse in A so stark wirke, dass dagegen die Wirkung der entfernten Massen in $B, C \dots$ vernachlässigt werden könne. Die Massen in A und a wirken auf einander mit einer Kraft, die von ihrer Grösse, Entfernung, relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung abhängt; indess möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die aus der relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung sich ergebende Correction der elektrostatischen (von den Massen und der Entfernung abhängigen) Kraft gegen diese letztere so gering sei, dass sie ebenfalls vernachlässigt werden dürfe. Unter diesen Voraussetzungen folgt, dass, wenn keine andere Kraft auf die Masse in a wirkt, diese Masse den Gesetzen der Bewegung durch Centralkräfte, welche dem Quadrat der Entfernung verkehrt proportional sind, folgen müsse. Die Masse in a wird folglich nach den Kepler'schen Gesetzen z. B. eine elliptische Bahn um A beschreiben. Es wird aber eine Störung in dieser Bewegung der betrachteten Masse um A eintreten, sobald ausser der Centralkraft eine elektromotorische Kraft parallel mit der Linie AB mit constanter Intensität auf die betrachtete Masse wirkt. Die Elemente der bisherigen elliptischen Bewegung werden nun fortwährend geändert werden, und die von der betrachteten Masse beschriebene Bahn wird dadurch in eine Spirallinie übergehen, in welcher die betrachtete Masse endlich so weit von A fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von A in die Wirkungssphäre von B gelangt, und so fort, nachdem sie eine Anzahl Spiralwindungen um B beschrieben hat, auch von B so weit fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von B in

die Wirkungssphäre von C gelangt. Auf diese Weise kann also eine elektromotorische Kraft ein Fortströmen der negativen Elektricität in der Richtung ABC bewirken, an welchem die positiven Massen in A, B, C keinen Antheil nehmen. Das Wesentliche dieser Betrachtung besteht darin, dass, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört, die betrachtete Masse sogleich wieder nach den Kepler'schen Gesetzen in elliptischer Bahn um diejenige positive Masse sich bewegen wird, in deren Nähe sie sich gerade befindet, weil nach Wegfall der störenden Kraft keine weitere Aenderung der Elemente ihrer Centralbewegung stattfindet. Auch ersieht man leicht, dass in dieser wesentlichen Beziehung nichts geändert werden würde, wenn die positiven Massen in $A, B, C \dots$ gleichfalls beweglich angenommen und ausser der Centralkraft der negativen Massen, in deren Nähe sie sich befinden, der störenden Einwirkung der nämlichen elektromotorischen Kraft unterworfen würden, welche aber für diese positiven Massen die entgegengesetzte Richtung, wie für die negativen hätte. Es ergibt sich daraus folgendes Resultat. Wenn die elektromotorische Kraft c auf die betrachtete negative Masse allein wirkte, so würde sie dieser Masse in der Richtung ABC während der Zeit t eine Geschwindigkeit ct ertheilen, mit welcher sich diese Masse, auch nachdem die Kraft c zu wirken aufgehört hätte, beharrlich in der Richtung ABC fortbewegen müsste. Unter Mitwirkung der Centralkräfte der positiven Massen in $A, B, C \dots$ aber wird zwar die elektromotorische Kraft c ebenfalls, so lange sie wirkt, ein Fortrücken der betrachteten Masse in der Richtung ABC bewirken, sobald die Kraft c aber zu wirken aufhört, wird auch dieses Fortrücken aufhören, d. h. dieses Fortrücken der betrachteten Masse in der Richtung ABC geschieht dann nicht mit einer Geschwindigkeit, welche fort dauert, nachdem die Kraft zu wirken aufgehört, welche das Fortrücken hervorgebracht hat. Der Grund also, warum die betrachtete Masse in der Richtung ABC nicht weiter vorrückt, nachdem die elektromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat, liegt darnach in den von den positiven Massen auf die betrachtete negative Masse ausgeübten Centralkräften. Das Wort Widerstand bezeichnet aber in der Theorie der galvanischen Kette wesentlich nichts Anderes, als das Factum, dass die Fortbewegung der elektrischen Fluida im galvanischen Strome der elektromotorischen Kraft proportional ist, d. h. aufhört, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört. Es folgt also daraus,

dass der Grund des Widerstands in den Centrakräften liegen kann, welche die im elektrischen Doppelstrome sich begegnenden positiven und negativen Massen wechselseitig auf einander ausüben. Es würde für weitere theoretische Untersuchung wichtig sein, aus diesem Grunde eine bestimmte und präzise Definition des Widerstands abzuleiten und die Beziehungen zu entwickeln, in welchen der nach seiner Wirkung definierte Widerstand dazu stehe. Es würde dabei hauptsächlich auf eine Bestimmung der Zeit ankommen, welche ein Theilchen braucht, um in seiner Spiralbahn von einer Windung um eine Centralmasse *A* zur entsprechenden Windung um die darauf folgende Centralmasse *B* zu gelangen. Dass aber solche Bestimmungen, auch wenn alle wesentlichen Elemente für die Rechnung gegeben sind, grosse Schwierigkeiten finden, zeigt die Theorie der Störungen in der Astronomie.

VI.

VERGLEICHUNG DES ALLGEMEINEN PRINCIPS DER MATHEMATISCHEN THEORIE INDUCIRTER ELEKTRISCHER STROEME VON NEUMANN MIT DEN AUS DEM GRUNDGESETZE DER ELEKTRISCHEN WIRKUNG ABGELEITETEN INDUCTIONSGESETZEN.

37.

In der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen ist schon im 26. Art. die Abhandlung angeführt worden, welche Neumann im Jahre 1845 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegt hatte, nämlich: «Die mathematischen Gesetze der inducierten Ströme». Diese damals noch nicht gedruckte Abhandlung konnte dort nur nach dem in Poggendorffs Annalen davon erschienenen Auszuge citiert werden. Neumann hat seitdem über denselben Gegenstand der Berliner Akademie der Wissenschaften eine noch umfassendere Arbeit vorgelegt: «Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducierter Ströme», welche, aus den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften von 1847 besonders abgedruckt, Berlin bei Reimer, 1848, erschienen ist. In dieser Abhandlung hat Neumann folgendes allgemeine Theorem aufgestellt:

«Wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem A , durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbindung derselben, in ein anderes A'' von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von A in A'' unter dem Einflusse eines elektrischen Stromsystems B , welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von B in B'' erfährt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensysteme durch diese Veränderung induciert worden sind, gleich dem mit der Inductions-Constante ϵ multiplicierten Unterschied der Potentialwerthe des Stroms B'' in Bezug auf A'' und des Stroms B in Bezug auf A , wenn A'' und A von der Stromeinheit durchströmt gedacht werden.»

Nachdem hierauf Neumann in den vier ersten Paragraphen seiner Abhandlung dieses Theorem nebst seinen Folgerungen entwickelt hat, fährt er § 5 fort: «W. Weber hat in seiner Abhandlung: Elektrodynamische Maassbestimmungen u. s. w. den Weg gebahnt, welcher über die Kluft in unserer Kenntniss der elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkung der Elektricität führen wird. Er zeigt, wie die Ampère'schen Gesetze für die Wirkung zweier Stromelemente aus der Wirkung der positiven und negativen Elektricität des einen Elements auf die beiden Elektricitäten des anderen Elements abgeleitet werden können. Diese Analyse der Ampère'schen Gesetze führte zu dem Grundgesetze zweier elektrischen Massen, nach welchem diese nicht allein von ihrer relativen Entfernung, sondern auch relativen Geschwindigkeit und deren Veränderung abhängig ist. Dieses Grundgesetz erklärt zugleich, wie Weber gezeigt hat, die Inductions-Erscheinungen und giebt ihre Gesetze. Der Gegenstand dieses Paragraphen ist nachzuweisen, wie weit die im Vorhergehenden enthaltenen Resultate mit den aus Webers Grundgesetz der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductions-Gesetzen übereinstimmen.»

Aus diesem Grundgesetze der elektrischen Wirkung, wie es in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen aufgestellt worden ist, entwickelt nun Neumann a. a. O. in seiner Abhandlung einen allgemeinen Ausdruck für die Induction, welchen er sodann auf die verschiedenen Arten der Induction in Anwendung bringt, näm-

lich 1) auf den Fall, wo weder die Strom- noch die Leiterelemente eine Ortsveränderung erleiden und die Induction bloss von einer Aenderung der Stromintensität herrührt; 2) auf den Fall, wo die Induction bloss durch eine Ortsveränderung der Leiterelemente hervorgebracht wird, die unter dem Einflusse eines constanten und unverrückten Stroms stattfindet; 3) auf den Fall, wo der inducierte Leiter ruht und die Induction durch eine Bewegung des ganzen Trägers eines constanten Stroms erregt wird. In allen diesen Fällen ergiebt sich nun das Resultat, dass die aus jenem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze mit den Resultaten des von Neumann aufgestellten allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducierter Ströme vollkommen übereinstimmen.

«Anders verhält es sich», fährt Neumann fort, «mit der Gleichung, welche die von einem einfachen Stromumgange inducierte elektromotorische Kraft unter der Annahme ausdrückt, dass derselbe aus einem bewegten Leiterstücke und einem ruhenden besteht. Die Summe der elektromotorischen Kraft, welche während des Umlaufs der Elemente des Inducen ten erregt wird, ist nach beiden Formeln dieselbe, die Richtung des inducierten Stroms aber die entgegengesetzte.»

Zur Entscheidung nun, ob in diesem einzigen Falle, wo zwischen dem von Neumann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze und zwischen dem Resultate seines eigenen allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducierter Ströme eine Abweichung stattfindet, dieses oder jenes wirklich gelte, hat Neumann in seiner Abhandlung einige Versuche angeführt, welche bewiesen haben, dass die aus Neumanns allgemeinem Principe abgeleitete Formel auch in diesem Falle die richtige sei. Auch ich habe, wie unten beschrieben werden wird, diese Versuche wiederholt und habe das von Neumann erhaltene Resultat vollkommen bestätigt gefunden. Nachdem durch diese Versuche das wahre, für diesen Fall gültige Gesetz factisch sicher gestellt ist, unterwirft Neumann die von ihm selbst gegebene Ableitung des Inductionsgesetzes dieses Falles aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung einer näheren Prüfung. «Es muss also untersucht werden», sagt er, «worin bei Ableitung der Formel aus Weber's Grundgesetz gefehlt worden ist. Der Umstand, dass der in Rede stehende Widerspruch nur bei Inducen ten mit Gleitstellen eintritt, führt die

Betrachtung sogleich auf diese. Hier treten neue Elemente in die Strombahn ein oder heraus, in welchen also die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von i bis 0 verändert, und die durch diese ihre Intensitätsveränderung einen inducierenden Effect ausüben, welcher in meinen Formeln schon enthalten ist, der aber bei der Anwendung des Weber'schen Grundgesetzes noch berücksichtigt werden muss.» Diese Prüfung führt Neumann zu dem Resultate, dass dieser zweite Theil der Induction, welcher in der ersten Ableitung aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht berücksichtigt worden war, den fraglichen Widerspruch zur Hälfte ausgleicht, indem sich dann die Summe der elektromotorischen Kräfte aus dem ersten und aus dem zweiten Theile $= 0$ ergibt.

Nach dieser zu keinem befriedigenden Resultate führenden Prüfung der Rechnung geht endlich Neumann noch zu einer Prüfung der dieser Rechnung zum Grunde liegenden Voraussetzung von den in diesem Falle stattfindenden physischen Verhältnissen über, unter welchen die Induction geschehe. Diese Voraussetzung besteht darin, dass in den Leiterelementen, welche an den Gleitstellen in die Strombahn ein- oder heraustreten, die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere. Es ist nun aber eine Bedingung für einen beharrlichen Strom, dass in allen Elementen der geschlossenen Kette eine gleiche Stromintensität stattfinde, und wenn daher auch die Stromintensität in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen variiert, so scheint doch auch hier der mittlere Werth der Stromintensität für die kurze Zeit, wo sie variiert, jener Bedingung genügen zu müssen, was, wenn die in der ganzen Kette gleiche Stromintensität $= i$ sein soll, voraussetzt, dass in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen die Stromstärke sich von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere. Unter dieser Voraussetzung von den physischen Verhältnissen, unter welcher die Induction in diesem Falle stattfindet, lässt sich nun leicht beweisen, dass der anfänglich bemerkte Widerspruch gänzlich verschwindet und die aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze auch für diesen Fall mit Neumanns allgemeinem Princip der mathematischen Theorie inducierter Ströme übereinstimmen.

Was nun aber die Voraussetzung selbst betrifft, worauf hierbei die Hebung des fraglichen Widerspruchs beruht, so sagt Neumann dar-

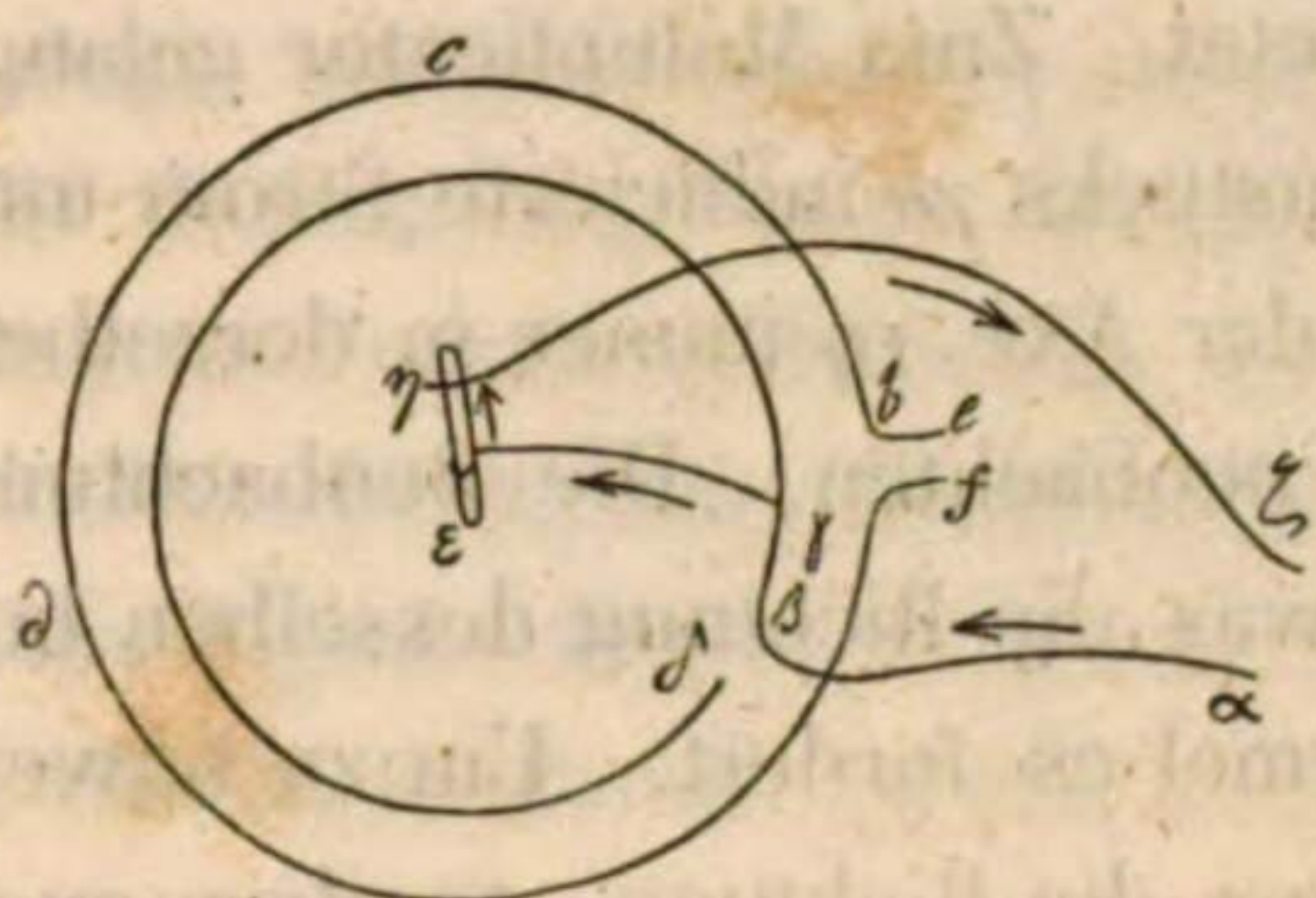
über, dass sie «weniger durch ihre Evidenz als durch ihren Erfolg gerechtfertigt» werde. Abgesehen aber von dem Bedenken, welches gegen die Voraussetzung selbst etwa gehegt werden könnte, scheint mir diese Voraussetzung, wenn sie wahr ist, mit einer Folge nothwendig verbunden zu sein, welche jenen Erfolg ganz wieder aufhebt. Zugegeben nämlich, dass wirklich in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere, so scheint mir damit doch die Folge nothwendig verbunden zu sein, dass unmittelbar, nachdem in dem eintretenden Elemente die Stromstärke bis auf $2i$ gestiegen ist, sie sogleich wieder in diesem von nun in der Kette bleibenden Elemente auf i herabsinke, weil i die in allen Theilen der Kette nothwendig gleiche Stromintensität bezeichnet. Auf gleiche Weise würde bei den an der Gleitstelle austretenden Theilchen, in welchen die Stromintensität constant $= i$ gewesen war, diese Stromintensität, ehe sie von $2i$ auf 0 abnehmen kann, erst von i auf $2i$ zugenommen haben müssen. Bringt man nicht bloss die oben vorausgesetzte Veränderung, sondern auch diese damit nothwendig verbundene in Rechnung, so ergibt sich dasselbe Resultat, wie wenn man von dieser Voraussetzung abstrahiert und einfach annimmt, wie zuvor geschehen war, dass in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere.

Der durch obige Voraussetzung also, wie mir scheint, nicht lösbare Widerspruch löst sich aber von selbst, wenn man näher prüft, ob in dem fraglichen Falle, bei der von Neumann gegebenen Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung, alle gegebenen relativen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Veränderungen wirklich in Rechnung gebracht worden seien, und es soll diese Lösung gegeben werden, nachdem in dem folgenden Artikel die Beschreibung der erwähnten, von Neumann zur Entscheidung dieser wichtigen Frage angestellten Versuche nebst meiner Wiederholung derselben vorausgeschickt worden ist.

38.

Beschreibung von Neumanns Versuchen und deren Wiederholung.

Neumann sagt S. 59 der angeführten Abhandlung: «Ich werde, obgleich ich die Beschreibung von Experimenten aus dieser Abhandlung ausgeschlossen habe, in diesem Falle, wegen seiner Wichtigkeit, die Vorrichtung, deren ich mich zur Prüfung der in Rede stehenden Formeln bedient habe, in kurzen Abrissen angeben. Ein Theil



des Schliessungsdrahts einer galvanischen Kette α ist ringförmig $\beta\gamma\delta$ gebogen; das Ende δ dieses Ringes reicht sehr nahe an seinen Anfang β , ohne mit ihm in leitender Verbindung zu stehen. Eine im Mittelpunkte des Ringes senkrecht auf seiner Ebene stehende rotierende Achse $\epsilon\eta$ führt das bewegliche Bahnstück $\epsilon\gamma$ mit sich im Kreise herum und zwar so, dass sein Ende in γ auf dem Ringe schleifend fortgeführt wird. Der inducierende Strom tritt, von α kommend, bei β in den Ring und bei γ aus ihm heraus in das bewegliche Bahnstück, aus diesem in die leitende Achse $\epsilon\eta$, bei η kehrt er durch die ruhende Drahtleitung $\eta\zeta$ nach α zurück. Diese Richtung des Stroms ist durch Pfeile in der Figur angedeutet. Concentrisch um den Ring liegt ein kreisförmiger Leiter bcd , in welchem durch die Bewegung des Bahnstücks $\epsilon\gamma$ ein Strom induciert wird. Wenn das bewegliche Bahnstück von β über γ bis δ fortgeführt ist, kann die Bahn desselben, wegen der geringen Entfernung von δ bis β , als geschlossen angesehen werden, und deshalb können die gegebenen Formeln zur Bestimmung der während eines Umlaufs entwickelten elektromotorischen Kraft angewandt werden Um Richtung und Grösse des inducierten Stroms zu beobachten, war folgende Einrichtung getroffen. Der inducierte kreisförmige Leiter war bei b unterbrochen und hier mit zwei Fortsätzen e und f versehen, von denen einer unmittelbar mit dem einen Ende des Multiplicatordrahts in Verbindung stand, der andere aber zu einer Metallfeder ging, welche in schleifender Berührung mit einer Metallhülse stand, die isoliert auf die rotierende Achse $\epsilon\eta$ gesteckt war. Der inducierte Strom ging also durch diese Feder in die Hülse, trat aus dieser

durch eine zweite gegen sie drückende Metallfeder heraus und ging aus dieser zu dem andern Ende des Multiplicatordrahts. Die Hülse hatte einen Ausschnitt, der mit Holz ausgefüllt war, auf welchem die eine Feder in dem Augenblicke lag, als das bewegliche Bahnstück $\gamma\epsilon$ bei δ den Ring $\beta\gamma\delta$ verliess, um bei β von Neuem mit ihm in leitende Verbindung zu treten. In diesem Augenblicke nämlich wird die Schliessung des Inducanten unterbrochen und wieder hergestellt, es verschwindet sein Strom und er tritt wieder auf, dadurch wird aber in dem Leiter keine Induction erregt, weil er ihr, nach der eben angegebenen Vorrichtung, keine geschlossene leitende Bahn darbietet. Zum Multiplicator gelangt also nur der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\epsilon$ inducierte Strom und lässt, da er bei fortgesetzter Drehung der Axe $\epsilon\eta$ immer in derselben Richtung fliesst, Richtung und Intensität beobachten. Die Beobachtung zeigte einen inducierten Strom, und, was die Richtung desselben betrifft, gab sie dieselbe, so wie meine Formel es fordert. Um zu beweisen, dass durch diese Formel nicht bloss die Richtung, sondern auch die Stärke des inducierten Stroms richtig ausgedrückt wird, wurde auf folgende Weise verfahren. Die Feder, welche die leitende Verbindung in der inducierten Strombahn unterbrach, wurde so viel höher gestellt, dass sie den mit Holz ausgefüllten Ausschnitt der Hülse, durch den eben die Unterbrechung bewirkt wurde, nicht mehr traf. Den inducierten Strömen wird jetzt immer eine geschlossene Bahn geboten. Zum Multiplicator gelangen bei fortgesetzter rascher Drehung der Axe $\epsilon\eta$ drei Ströme innerhalb sehr kurzer Zeit, nämlich der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\epsilon$ inducierte, dann der durch das Verschwinden des inducierenden Stroms inducierte, in dem Momente, wo das bewegliche Bahnstück den Ring bei δ verlässt, und endlich der durch sein Wiederauftreten inducierte, sobald das Stück den Ring in β wieder erreicht. Die Kraft, welche von diesen drei Strömen während der kurzen Dauer eines Umlaufs des Bahnstücks $\gamma\epsilon$ auf die Magnetnadel des Multiplicators ausgeübt wird, ist mit der Summe ihrer elektromotorischen Kräfte proportional; je nachdem das Vorzeichen dieser Summe positiv oder negativ ist, wird die Nadel auf der einen Seite oder der andern des Meridians ihre beinahe feste Stellung nehmen, oder sie wird, wenn jene Summe $= 0$ ist, in ihrer Stellung im Meridiane verharren Die Beobachtung zeigt, dass, wenn die Drehung rasch geschieht, die Nadel im Meridiane bleibt, wodurch die Richtigkeit meiner Formel sowohl in

Beziehung auf die Richtung als die Stärke des inducierten Stroms erwiesen ist.»

Zur Wiederholung dieser Versuche wurde 4 Kilogramm Kupferdraht, welcher $\frac{2}{3}$ Millimeter dick war, mit Seide übersponnen auf einen dünnen Messingreif von 120 Millimeter Durchmesser aufgewunden. In diesen Messingreif wurde ein hölzerner Cylinder gestellt, welcher, von etwas kleinerem Durchmesser als der Messingreif, mit einer metallenen Axe versehen war, durch die er mittelst eines Getriebes schnell gedreht werden konnte. In den hölzernen Cylinder war ein Streifen Kupfer eingelegt, welcher von der metallenen Axe bis zur Peripherie reichte. Mit diesem kupfernen Streifen waren an der Peripherie drei messingene Federn verbunden, welche den Messingreif von innen in drei Punkten berührten, welche in einer mit der Drehungsaxe parallelen Linie lagen. Diese 3 Federn dienten zur Herstellung einer sicheren Berührung, damit, wenn eine der 3 Federn einen Augenblick versagte, die Verbindung mit dem Messingreife durch die beiden andern Federn erhalten würde. Von den beiden Leitungsdrähten eines Grove'schen Bechers wurde der eine an dem Lager der Drehungsaxe befestigt, der andere an irgend einen Punkt des Messingreifs. Die beiden Enden des auf den Messingreif aufgewundenen übersponnenen Kupferdrahts wurden mit dem Multiplicator des Galvanometers verbunden, dessen Nadel eine Schwingungsdauer von nahe 10 Secunden besass.

Die beschriebene Vorrichtung unterscheidet sich von der Neumann'schen wesentlich nur in einer Beziehung, nämlich darin, dass der Messingreif nicht aufgeschnitten war, wodurch bewirkt wird, dass der Strom der Säule, welcher durch die metallene Drehungsaxe eintritt, von der einen Stelle des Messingreifs, zu welcher er durch die Messingfedern geführt wird, auf zwei Wegen zu der andern Stelle des Messingreifs gelangen kann, von wo er zur Säule zurückgeführt wird: der Strom theilt sich daher zwischen diesen beiden Wegen, nämlich zwischen den beiden Theilen des Messingreifs, welche den Berührungspunkt der Messingfedern mit derjenigen Stelle verbinden, wo der andere Leitungsdraht der Säule am Messingreife befestigt ist. Durch diese Theilung des Stroms wird wesentlich Dasselbe erreicht, was im Neumann'schen zweiten Versuche die Erhaltung des Schlusses der inducierten Kette in dem Augenblicke bezweckte, wo die Gleitstelle den Schnitt des Messingreifs passierte, dass nämlich die Summe

der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Stromelementen ausgeübt wurden, für eine ganze Umdrehung der Axe $= 0$ wird, und daher bei schneller Drehung die beobachtete Wirkung auf das Galvanometer bloss von der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte abhing, welche von der Bewegung des Bahnstücks $\gamma\epsilon$ herrührten. Durch die beschriebene Theilung des Stroms wird ebenfalls bewirkt, dass die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Elementen ausgeübt werden, $= 0$ wird, und zwar nicht bloss für die ganze Dauer einer Umdrehung, sondern für jeden einzelnen Augenblick, woraus für die Ausführung des Versuches der Vortheil entspringt, dass der Erfolg nicht mehr an die Bedingung einer schnellen Drehung geknüpft ist, was bei dem Neumann'schen Versuche der Fall war. *) Eine

*) Dass die beschriebene Theilung des Stroms die angegebene Wirkung wirklich habe, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Bezeichnet man die constante Intensität des ungetheilten Stroms mit i , und theilt sich dieser Strom bei seinem Eintritte in den Messingreif in zwei Theile, von denen der eine die Intensität i_1 hat und durch den Kreisbogen ψ zum Austrittspunkte geht, der andere die Intensität i_2 hat und durch den Bogen $2\pi - \psi$ zum Austrittspunkte geht; so geben die Ohm'schen Gesetze der Stromtheilung folgende Gleichungen:

$$i_1 + i_2 = i$$

$$i_1 : i_2 = (2\pi - \psi) : \psi.$$

Nimmt nun ψ um $d\psi$ zu, so verschwindet in dem Bogenelemente $d\psi$ die Stromintensität i_2 , und statt dessen entsteht in demselben Elemente die Stromintensität $-i_1$ (wo das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Richtung des neu entstandenen Stroms der Richtung des wachsenden Bogens ψ entgegengesetzt ist). Das Verschwinden eines positiven Stroms i_2 in dem Elemente $d\psi$ erzeugt eine mit $i_2 d\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, und das Entstehen eines negativen Stromes $-i_1$ in dem Elemente $d\psi$ eine mit $-(-i_1 d\psi) = i_1 d\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, deren Summe also, wenn a einen constanten Factor bezeichnet,

$$= a(i_1 + i_2) d\psi = a i d\psi$$

ist. Indem nun aber ψ um $d\psi$ wächst, ändert sich zugleich das Verhältniss von $i_1 : i_2 = (2\pi - \psi) : \psi$, während die Summe $i_1 + i_2 = i$ unverändert bleibt, woraus die beiden Differentialgleichungen erhalten werden:

$$di_1 + di_2 = 0$$

$$\psi di_1 - (2\pi - \psi) di_2 = -i d\psi$$

folglich $di_1 = -\frac{id\psi}{2\pi}$ und $di_2 = +\frac{id\psi}{2\pi}$. Die Intensitätsänderung di_1 des Stromes i_1 im Bogen ψ in der Richtung abnehmender Werthe von ψ erzeugt eine mit ψdi_1 proportionale elektromotorische Kraft $+ a\psi di_1 = -a\psi \frac{id\psi}{2\pi}$; die Intensitätsänderung di_2 im Bogen $(2\pi - \psi)$ in der Richtung wachsender Werthe von ψ erzeugt eine mit $-(2\pi - \psi) di_2$ proportionale elektromotorische Kraft $= -a(2\pi - \psi) di_2$,

andere Einrichtung, welche getroffen wurde, um sowohl den ersten Neumann'schen Versuch, als auch den zweiten, ganz unverändert, zu wiederholen, soll nachher beschrieben werden.

Es wurden folgende zwei Versuche gemacht. *Erstens* wurde der hölzerne Cylinder durch das Getriebe in jeder Secunde 10 Mal um seine Axe gedreht, während der inducierende Strom durch die Drehungsaxe und den Messingreif geführt wurde, und es wurde am Galvanometer beobachtet, dass dadurch kein Strom induciert wurde. Der unverrückte Stand der Galvanometernadel konnte bis auf $\frac{1}{2}$ Scalentheil verbürgt werden. Dieses Resultat stimmt also mit dem des zweiten Neumann'schen Versuches ganz überein. *Zweitens* wurde um den Messingreif noch ein Hilfsdraht einmal herum geführt, und seine Enden mit der Säule verbunden, so dass der Strom, statt durch die Drehungsaxe und durch den Messingreif, durch diesen Draht hindurch gehen musste. Im Augenblicke, wo diese Kette geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, dessen Richtung der des inducierenden Stroms entgegengesetzt war. Bei Lösung der Kette zeigte sich ein gleich starker inducierter Strom, aber von gleicher Richtung mit dem inducierenden. In beiden Fällen erhielt die Galvanometernadel eine Ablenkung von nahe 22 Scalentheilen. Der zweite Versuch dient zum Beweise, dass im ersten Versuche, bei 100 Umdrehungen des beweglichen Stromstücks während einer Schwingung, die Galvanometernadel über 1000 Scalentheile Ablenkung erhalten haben müsste, wenn jede Umdrehung eine elektromotorische Kraft erzeugt hätte, welche der durch den zweiten Versuch bestimmten gleich wäre. Eine solche Kraft ist also nicht vorhanden.

Dieser Versuch bietet bei der beschriebenen Stromtheilung noch ein besonderes Interesse dadurch dar, dass er dem bekannten elektrodynamischen Rotationsversuche genau entspricht, wo innerhalb eines festen kreisrunden Stroms ein beweglicher Stromtheil sich befindet, welcher nach dem Mittelpunkte des ersteren gerichtet ist. Ueber diesen elektrodynamischen Rotationsversuch siehe Poggendorff in den Annalen 1849. 77. S. 22 ff. Es ist bekannt, dass der Kreisstrom den beweglichen Ra-

$= -a(2\pi - \psi) \frac{id\psi}{2\pi}$. Es ergibt sich hieraus die Summe aller elektromotorischen Kräfte in Folge der Zunahme $d\psi$ des Bogens ψ :

$$= aid\psi - a\psi \frac{id\psi}{2\pi} - a(2\pi - \psi) \frac{id\psi}{2\pi} = 0,$$

was zu beweisen war.

dialstrom rotieren macht, in der Richtung des Kreisstroms selbst oder in umgekehrter, je nachdem die Richtung des Stroms in dem beweglichen Stromtheile nach dem Mittelpunkte zu oder von ihm abgerichtet ist. Nach der sonst gültigen Regel, nach welcher elektromagnetische oder elektrodynamische Versuche in magnetoelektrische oder Voltainductions-Versuche umgekehrt werden, scheint es, dass, wenn jener bewegliche Radialstrom gedreht wird, wie es bei unserem Versuche der Fall war, in dem festen kreisrunden Leiter ein der Drehungsrichtung paralleler oder entgegengesetzter Strom induciert werden müsste, je nachdem der Strom in dem beweglichen Leiter von dem Mittelpunkte ab oder nach demselben zu gerichtet wäre. Auch leuchtet ein, dass die Vertauschung der Quecksilberrinne, in die man bei dem erwähnten Rotationsversuche den beweglichen Stromtheil eintauchen zu lassen pflegt, mit einem von dem beweglichen Stromtheile berührten Messingreife, unwesentlich ist und keinen Einfluss auf das Resultat haben könne. Der Versuch hat nun aber gelehrt, dass der nach der angeführten Regel zu erwartende Inductionsstrom in diesem Falle nicht stattfindet. Jene Regel der Umkehrung gilt daher nicht allgemein, sondern es findet davon eine Ausnahme statt, wenn der geschlossene inducierende Strom aus einem beweglichen und einem unbeweglichen Stromtheile besteht, welche durch eine Gleitstelle verbunden sind. Bekanntlich findet der Inductionsstrom statt, wenn der inducierte Leiter aus zwei durch eine Gleitstelle verbundenen Theilen besteht.

Ferner habe ich auch die Neumann'schen Versuche unverändert wiederholt, indem der Messingreif neben der Stelle durchschnitten wurde, wo der von der Säule kommende Leitungsdraht an ihm befestigt war. Die eine Verbindung des um den Messingreif gewundenen Drahts mit dem Multiplicator des Galvanometers wurde durch eine Feder hergestellt und konnte durch Zurückdrücken dieser Feder gelöst werden. Dieses Zurückdrücken wurde durch einen Holzstift bewirkt, welcher am Holzcylinder befestigt und so gestellt war, dass dadurch die Lösung der Feder in dem Augenblicke stattfand, wo die am Holzcylinder angebrachten Messingfedern auf die durchschnittenene Stelle des Messingreifs zu stehen kamen. Noch ist zu bemerken, dass der um den Messingreif gewundene Draht eine geringere Anzahl von Umwindungen als vorher bildete. Es wurden damit folgende Versuche gemacht. Erstens wurde der hölzerne Cylinder um seine Axe durch das Getriebe

10 Mal in jeder Secunde gedreht und am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher so stark war, dass die Ablenkung der Nadel über 500 Scalentheile betrug und mit der Scale nicht mehr gemessen werden konnte. Zweitens: der Holzcyylinder wurde nach Beseitigung des Holzstiftes in derjenigen Stellung festgehalten, wo die an ihn befestigten Messingfedern das mit der Säule nicht verbundene Ende des durchschnittenen Messinggreifs berührten, so dass der Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. In dem Augenblicke nun, wo die Säule geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher die Nadel um 13,5 Scalentheile in der nämlichen Richtung wie bei dem ersten Versuche ablenkte, vorausgesetzt, dass die Richtung des inducierenden Stroms die nämliche war, und dass beim ersten Versuche in derjenigen Richtung gedreht wurde, bei welcher die Messingfedern von ihrer eben beschriebenen Stelle über den Schnitt des Messinggreifs fortgeführt wurden. Drittens: um den Messingring wurde noch ein Hilfsdraht einmal herumgewunden und die Säule so damit geschlossen, dass der Strom diese Drahtwindung in gleicher Richtung durchlief, wie vorher den Messingreif. Im Augenblicke der Schliessung der Säule wurde dann mit dem Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher die Nadel 13,8 Scalentheile in gleicher Richtung wie vorher ablenkte. Hierauf wurde viertens der Multiplicator geschwächt und der erste Versuch nochmals wiederholt. Der inducierte Strom brachte dann eine bleibende Ablenkung der Magnetometernadel von 377 Scalentheilen hervor, jedoch liess sich eine feinere Messung dieser Ablenkung nicht ausführen, wegen bedeutender Schwankungen, die wahrscheinlich ihren Grund in Unvollkommenheiten der technischen Ausführung der Rotationsvorrichtung hatten. Fünftens wurde auch der zweite Versuch nochmals wiederholt und es ergab sich, statt der früher beobachteten Ablenkung von 13,5 Scalentheilen, mit dem geschwächten Multiplicator nur eine Ablenkung von 8 Scalentheilen. Sechstens endlich wurde auch der zweite Neumann'sche Versuch wiederholt, welcher sich von dem vierten Versuch nur dadurch unterschied, dass der Holzstift am Holzcyylinder entfernt wurde, wodurch bewirkt wurde, dass nun bei der Drehung des Holzcyinders die inducierte Kette immer geschlossen blieb. Bei gleich schneller Drehung, wie beim ersten und vierten Versuche, wurde dann an der Galvanometernadel gar keine Ablenkung

beobachtet und dieser Ruhestand konnte bis auf ein paar Scalentheile verbürgt werden, innerhalb welcher die Nadel schwankte.

Die Resultate der im vierten und fünften Versuche gemachten Messungen gestatten eine Vergleichung, welche, auch wenn diese Messungen keine grosse Genauigkeit besaßen, bemerkt zu werden verdient. Aus dem Resultate der im vierten Versuche gemachten Messung lässt sich nämlich die grösste Elongation berechnen, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine einzige momentane Umdrehung des Holzcylinders ertheilten Bewegung erreicht haben würde. Es ist nur zu diesem Zwecke noch hinzuzufügen, dass das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen der Nadel $= 0,47160$ war, oder dass, wenn man dasselbe durch den Modulus des Logarithmensystems dividiert mit λ bezeichnet, $\lambda = 1,088$ war. Bezeichnet man ausserdem mit y die im vierten Versuche beobachtete Ablenkung für n Umdrehungen während der Schwingungsdauer der Nadel, so ergibt sich für die grösste Elongation, welche die Nadel in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, folgender Ausdruck:

$$x = \frac{y}{n} \cdot \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \quad *)$$

Nun ist in Scalentheilen $y = 377$, ferner $n = 400$ (weil 40 Umdrehungen auf 1 Secunde kamen und die Schwingungsdauer $\tau = 40$ Sekunden war) und $\lambda = 1,088$ gefunden worden; folglich ist die grösste Elongation, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, in Scalentheilen ausgedrückt,

$$x = 8,164,$$

*) Siehe Beilage C, wo mit Rücksicht auf die Dämpfung die der ruhenden Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit, wenn x die gesuchte Elongation und τ die Schwingungsdauer unter dem Einflusse der Dämpfung bezeichnet, ausgedrückt ist durch

$\frac{x}{\tau} \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}$. Diese Drehungsgeschwindigkeit ist aber durch das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment F , dividiert durch das Trägheitsmoment der Nadel K und multipliciert mit der Zeit einer Umdrehung $\frac{\tau}{n}$ im vierten Versuche gegeben $= \frac{\tau}{n} \frac{F}{K}$. Endlich ist das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment $F = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\tau\tau} Ky$, folglich

$$\frac{x}{\tau} \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\tau}{n} \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\tau\tau} y$$

woraus sich für x der oben angeführte Ausdruck ergibt.

während im fünften Versuche eine Elongation von 8 Scalentheilen wirklich beobachtet worden ist, wenn der Holzcylinder nicht gedreht wurde, sondern in derjenigen Stellung fest stand, bei welcher der bei Schliessung der Säule entstehende Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. Aus der aus dieser Vergleichung hervorgehenden Uebereinstimmung folgt, dass der im vierten Versuche inducierte Strom, eine nur mittelbare Folge der Drehung, durch den bei jeder Umdrehung im ganzen Messingreif entstehenden Strom induciert worden sei (dessen Wiederverschwinden keinen Einfluss ausüben konnte, weil die Multiplicatorkette in dem Augenblicke dieses Verschwindens gelöst war); die Drehung des beweglichen Stromstücks selbst hatte also keinen Antheil an dem inducierten Strome. Es finden sich durch diese Versuche also die von Neumann gegebenen Bestimmungen vollkommen bestätigt.

39.

Das Inductionsgesetz für inducierende Ströme mit Gleitstellen.

Das allgemeine Princip der mathematischen Theorie inducierter elektrischer Ströme, welches von Neumann aufgestellt worden ist, ist ein Theorem, welches sich auf die Ströme und Leiter im Ganzen, und zwar bloss auf ihre Stärke und Lage am Anfang und am Ende der betrachteten Induction bezieht und die gesuchte Summe der elektromotorischen Kräfte von der Betrachtung aller mitwirkenden Elemente im Einzelnen und von der Betrachtung des allmählichen Uebergangs der Ströme und Leiter aus ihrem Zustande am Anfange der Induction zu dem am Ende derselben unabhängig darstellt. Die Erleichterung, welche ein Theorem von solcher Einfachheit und Allgemeinheit überall, wo es Anwendung findet, zur wirklichen Bestimmung der gesuchten Summe elektromotorischer Kräfte gewährt, leuchtet von selbst ein. Mit dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung verhält es sich der Sache nach ganz anders, weil dieses nur eine für alle Elementarwirkungen gültige Regel geben soll, aus welcher die gesuchte Summe elektromotorischer Kräfte nicht unmittelbar erhalten wird, sondern nur mittelbar durch eine Summation aller vollständig zusammengestellten Elementarwirkungen gefunden werden kann. Es kommt daher hier bei Ableitung des Inductionsgesetzes für einen bestimmten Fall hauptsächlich auf eine für diesen Fall vollständige Zusammenstellung aller Elementarwirkungen an, welche sich aus der Be-

trachtung der Verhältnisse ergeben muss, welche der gegebene Fall voraussetzt. Die Ableitung der Inductionsgesetze aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung fordert daher eine ganz besondere Aufmerksamkeit auf alle Verhältnisse, welche durch jeden gegebenen Fall bestimmt sein sollen. Es ist dies geschehen für den Fall der von Stromelementen auf andere Stromelemente oder auf Leiterelemente ausgeübten Induction sowohl in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen, als auch in der von Neumann in der angeführten Abhandlung § 5 gegebenen Ableitung, wodurch sich für diesen Fall zwei wesentlich verschiedene Arten von Elementarwirkungen herausgestellt haben, nämlich diejenigen, welche ein Stromelement durch seine relative Bewegung zum inducierten Elemente, und diejenigen, welche ein Stromelement durch Aenderung seiner Stromintensität ausübt.

Diese Eintheilung der Elementarwirkungen hat nun Neumann auch auf den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstellen in Anwendung gebracht. Dieser Strom zerfällt in ein bewegliches und unbewegliches Stromstück, die an zwei Stellen in leitender Verbindung stehen, von denen wenigstens eine Gleitstelle ist. Es ergab sich leicht, dass die Elementarwirkungen des beweglichen Stromstücks der ersten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch ihre relative Bewegung zu den inducierten Elementen ausüben. Eben so ergab sich, dass die Elementarwirkungen des unbeweglichen Stromstücks der zweiten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch Aenderung ihrer Stromintensität ausüben. Den aus der ersteren Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft hatte Neumann zuerst allein berechnet, bei der nachfolgenden Prüfung aber den aus der andern Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft noch hinzugefügt.

Eine weitere Prüfung kann nur darauf gerichtet sein, ob die Zusammenstellung der Elementarwirkungen nach den beiden angegebenen Arten für den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstelle wirklich erschöpfend ist. In der That wäre sie wirklich erschöpfend, wenn in diesem Falle bloss inducierende Stromelemente gegeben wären; denn diese müssen entweder dem beweglichen oder dem unbeweglichen Stromstücke angehören, wonach ihre Elementarwirkungen entweder der ersteren oder der letzteren Art sein müssen. Prüft man nun

er näher, ob in dem vorliegenden Falle wirklich alle gegebenen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Aenderungen auf Bewegungen der Elektrizität in Stromelementen und deren Aenderungen zurückgeführt werden können; so ergiebt sich leicht, dass diese Zurückführung überall möglich ist, mit Ausnahme der Gleitstelle. An der Gleitstelle tritt nämlich eine plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen ein, indem diejenigen, welche von dem beweglichen Stromstücke zu dem unbeweglichen übergehen, an der Bewegung des ersteren Theil zu nehmen aufhören, und diejenigen, welche von dem unbeweglichen Stromstücke zu dem beweglichen übergehen, an der Bewegung des letzteren Theil zu nehmen beginnen. Diese plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle, kann nicht unter denjenigen Aenderungen betrachtet werden, welche in den Stromelementen selbst stattfinden; denn jene Aenderung tritt weder in den Stromelementen des beweglichen Stromstücks ein, weil alle elektrischen Theilchen, so lange sie diesen Stromelementen angehören, auch an der Bewegung derselben Theil nehmen, noch tritt sie in den Stromelementen des unbeweglichen Stromstücks ein. Jene plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle kann also nicht auf Aenderungen der Bewegungen in den Stromelementen selbst zurückgeführt werden und ist daher die Quelle einer dritten Art von Elementarwirkungen, welche von den beiden, inducierenden Stromelementen zukommenden, Arten von Elementarwirkungen unterschieden werden muss. Es fragt sich also nur darum, ob aus der angegebenen plötzlichen Aenderung der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle nach dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung elektromotorische Kräfte wirklich entspringen oder nicht. Im ersteren Falle leuchtet ein, dass diese elektromotorischen Kräfte, da sie von Neumann noch nicht in Rechnung gebracht sind, der von Neumann berechneten Summe elektromotorischer Kräfte noch hinzugefügt werden müssen.

Die Ableitung der aus der plötzlichen Aenderung in der Bewegung der elektrischen Fluida an einer Gleitstelle entspringenden elektromotorischen Kräfte ist auch in der im 30. Artikel der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung des Gesetzes der Volta-Induction aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht mit enthalten, denn letztere

trachtung der Verhältnisse ergeben muss, welche der gegebene Fall voraussetzt. Die Ableitung der Inductionsgesetze aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung fordert daher eine ganz besondere Aufmerksamkeit auf alle Verhältnisse, welche durch jeden gegebenen Fall bestimmt sein sollen. Es ist dies geschehen für den Fall der von Stromelementen auf andere Stromelemente oder auf Leiterelemente ausgeübten Induction sowohl in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen, als auch in der von Neumann in der angeführten Abhandlung § 5 gegebenen Ableitung, wodurch sich für diesen Fall zwei wesentlich verschiedene Arten von Elementarwirkungen herausgestellt haben, nämlich diejenigen, welche ein Stromelement durch seine relative Bewegung zum inducierten Elemente, und diejenigen, welche ein Stromelement durch Aenderung seiner Stromintensität ausübt.

Diese Eintheilung der Elementarwirkungen hat nun Neumann auch auf den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstellen in Anwendung gebracht. Dieser Strom zerfällt in ein bewegliches und unbewegliches Stromstück, die an zwei Stellen in leitender Verbindung stehen, von denen wenigstens eine Gleitstelle ist. Es ergab sich leicht, dass die Elementarwirkungen des beweglichen Stromstücks der ersten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch ihre relative Bewegung zu den inducierten Elementen ausüben. Eben so ergab sich, dass die Elementarwirkungen des unbeweglichen Stromstücks der zweiten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch Aenderung ihrer Stromintensität ausüben. Den aus der ersteren Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft hatte Neumann zuerst allein berechnet, bei der nachfolgenden Prüfung aber den aus der andern Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft noch hinzugefügt.

Eine weitere Prüfung kann nur darauf gerichtet sein, ob die Zusammenstellung der Elementarwirkungen nach den beiden angegebenen Arten für den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstelle wirklich erschöpfend ist. In der That wäre sie wirklich erschöpfend, wenn in diesem Falle bloss inducierende Stromelemente gegeben wären; denn diese müssen entweder dem beweglichen oder dem unbeweglichen Stromstücke angehören, wonach ihre Elementarwirkungen entweder der ersteren oder der letzteren Art sein müssen. Prüft man nun

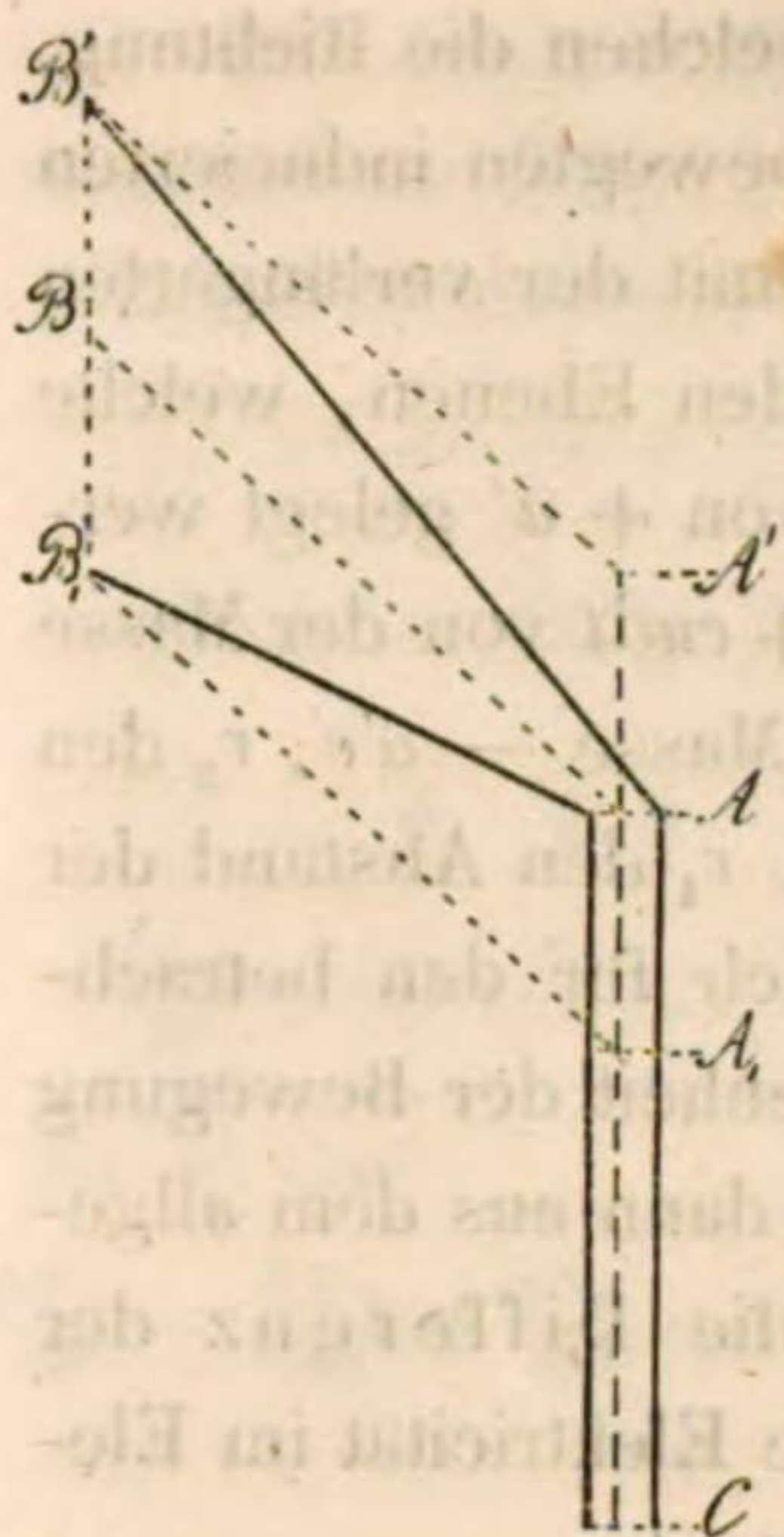
aber näher, ob in dem vorliegenden Falle wirklich alle gegebenen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Aenderungen auf Bewegungen der Elektrizität in Stromelementen und deren Aenderungen zurückgeführt werden können; so ergibt sich leicht, dass diese Zurückführung überall möglich ist, mit Ausnahme der Gleitstelle. An der Gleitstelle tritt nämlich eine plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen ein, indem diejenigen, welche von dem beweglichen Stromstücke zu dem unbeweglichen übergehen, an der Bewegung des ersteren Theil zu nehmen aufhören, und diejenigen, welche von dem unbeweglichen Stromstücke zu dem beweglichen übergehen, an der Bewegung des letzteren Theil zu nehmen beginnen. Diese plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle, kann nicht unter denjenigen Aenderungen befasst werden, welche in den Stromelementen selbst stattfinden; denn jene Aenderung tritt weder in den Stromelementen des beweglichen Stromstücks ein, weil alle elektrischen Theilchen, so lange sie diesen Stromelementen angehören, auch an der Bewegung derselben Theil nehmen, noch tritt sie in den Stromelementen des unbeweglichen Stromstücks ein. Jene plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle kann also nicht auf Aenderungen der Bewegungen in den Stromelementen selbst zurückgeführt werden und ist daher die Quelle einer dritten Art von Elementarwirkungen, welche von den beiden, inducierenden Stromelementen zukommenden, Arten von Elementarwirkungen unterschieden werden muss. Es fragt sich also nur darum, ob aus der angegebenen plötzlichen Aenderung der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle nach dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung elektromotorische Kräfte wirklich entspringen oder nicht. Im ersteren Falle leuchtet ein, dass diese elektromotorischen Kräfte, da sie von Neumann noch nicht in Rechnung gebracht sind, der von Neumann berechneten Summe elektromotorischer Kräfte noch hinzugefügt werden müssen.

Die Ableitung der aus der plötzlichen Aenderung in der Bewegung der elektrischen Fluida an einer Gleitstelle entspringenden elektromotorischen Kräfte ist auch in der im 30. Artikel der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung des Gesetzes der Volta-Induction aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht mit enthalten, denn letztere

ist dort ausdrücklich auf die Induction von Stromelementen beschränkt worden, wobei also nur diejenigen Aenderungen der Bewegung der elektrischen Fluida in Betracht gezogen zu werden brauchten, welche in den Stromelementen vorkommen. Wenn es nun aber Aenderungen in der Bewegung der elektrischen Fluida giebt, welche in keinem Stromelemente vorkommen, sondern nur an der Grenze zweier Stromelemente, oder in dem Augenblicke, wo das elektrische Fluidum von dem einen Stromelemente zu dem andern übergeht, und ein solcher Fall an einer Gleitstelle wirklich eintritt; so bedarf obiges Inductionsgesetz noch einer Ergänzung, wenn es diesen Fall mit umfassen soll. Diese Ergänzung kann leicht gegeben werden; denn es ist dazu nur nöthig, dass die elektrischen Massen, welche solche plötzliche Aenderungen der Geschwindigkeit ihrer Bewegung erleiden, und die Grösse dieser Aenderungen genau bestimmt seien, um das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung auch hierauf in Anwendung zu bringen. Dabei sollen zum leichteren Verständniss dieselben Bezeichnungen gebraucht werden, wie in der im 30. Art. der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung; auch sollen Kürze halber alle hierbei in gleicher Weise gültigen Bestimmungen nicht nochmals entwickelt, sondern von dort entlehnt werden.

Was die Masse des elektrischen Fluidums betrifft, welche eine plötzliche Aenderung in ihrer Bewegung an der Gleitstelle erleidet, so kann diese nicht, wie es bei einem Stromelemente geschah, durch das Product $\pm \alpha e$ ausgedrückt werden, wo α die Länge des Stromelements bezeichnete, sondern es muss an die Stelle von α die Länge des Wegelements $u dt$ gesetzt werden, welches die Elektricität mit der Geschwindigkeit u , mit welcher sie durch die Gleitstelle geht, in dem Zeitelemente dt zurücklegen würde. Die inducierten Massen können dagegen eben so, wie Art. 30 der angeführten Abhandlung, durch $+\alpha'e'$ und $-\alpha'e'$ dargestellt werden, wo α' die Länge des inducierten Elements und $\pm e'$ die in der Längeneinheit des inducierten Leiters enthaltene positive oder negative Elektricität bezeichnet.

Die Bewegungen jener inducierenden Massen $+e u dt$ und $-e u dt$ und die von ihnen durchlaufenen Bahnen lassen sich auf folgende Weise darstellen. A sei die Gleitstelle, AB der angrenzende Theil des beweglichen, AC der angrenzende Theil des unbeweglichen Stromstücks. Die



Wege $CA = AB$ werden von den elektrischen Fluidis mit der Geschwindigkeit u in derselben Zeit durchlaufen, in welcher das bewegliche Stromstück von A, B , bis AB oder von AB bis $A'B'$ fort-rückt. Die Zusammensetzung beider Bewegungen ergibt für die negative Masse (wenn diese von dem beweglichen Stromstück zum unbeweglichen übergeht) die Bahn B, AC , und das Bahnstück B, A' wird in gleicher Zeit wie AC durchlaufen; für die positive Masse ergibt sich eben so die Bahn CAB' , und die Stücken CA und AB' werden in gleicher Zeit durchlaufen. In dieser Darstellung ist der Deutlichkeit wegen angenommen worden, dass der Strom an der Gleitstelle A eine plötzliche Wendung mache und von der Richtung CA zur Richtung AB übergehe. In der Wirklichkeit findet eine solche plötzliche Wen-

dung nicht statt, sondern man kann annehmen, dass die beiden Elemente der wahren Strombahn CA und AB nahe eine gerade Linie bilden. Bezeichnet man dann mit v die Geschwindigkeit des beweglichen Stromstücks, so ist $A, A' = AA' = B, B' = BB' = vdt$, während die Länge der Stromelemente $CA = AB = udt$ ist. Hieraus ergibt sich also für die positive Masse, dass sie in zwei gleichen auf einander folgenden Zeitelementen dt die Wege $CA = udt$ und $AB' = (u + v) dt$, für die negative Masse, dass sie in denselben Zeitelementen die Wege $B, A = -(u - v) dt$ und $AC = - udt$ zurücklegt. Die Geschwindigkeit der positiven Elektrizität geht also bei A von $+u$ plötzlich zu $+(u + v)$ über; die Geschwindigkeit der negativen Elektrizität geht dagegen bei A von $-(u - v)$ plötzlich zu $-u$ über. Soll auch dieser Wechsel der Geschwindigkeit nach dem Gesetz der Stetigkeit geschehen, so bezeichne man die, wenn auch noch so kleine, Zeit dieses Uebergangs mit τ und in irgend einem Augenblicke $d\sigma$ am Ende des Zeitabschnitts σ im Zeitraum τ die Geschwindigkeit der positiven Elektrizität mit $+(u + \frac{\sigma}{\tau} v)$ und eben so die Geschwindigkeit der negativen Elektrizität mit $-(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v)$. Ausserdem bezeichne man, wie in Art. 30 der angeführten Abhandlung, mit θ den Winkel, welchen die Richtung von $+u$,

d. h. AB mit $A\alpha' = r$ macht, mit θ' den Winkel, welchen die Richtung, nach welcher sich die positive Elektrizität im unbewegten inducierten Elemente α' mit der Geschwindigkeit $+u'$ bewegt, mit der verlängerten Geraden $A\alpha'$ macht, und mit ω den Winkel der beiden Ebenen, welche durch $A\alpha'$ parallel mit der Richtung von $+u$ und von $+u'$ gelegt werden. Endlich bezeichne r_1 den Abstand der Masse $+eudt$ von der Masse $+a'e'$, r_2 den Abstand der Masse $-eudt$ von der Masse $-a'e'$, r_3 den Abstand der Masse $+eudt$ von der Masse $-a'e'$, r_4 den Abstand der Masse $-eudt$ von der Masse $+a'e'$, die sämtlich für den betrachteten Augenblick $= r$ sind, aber bei der Verschiedenheit der Bewegung jener Massen nicht gleich bleiben. Es ergibt sich dann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung die Differenz der Kräfte, welche auf die positive und negative Elektrizität im Elemente α' wirken, von welcher die Induction abhängt,

$$-\frac{aa}{46} \cdot \frac{eudt \cdot a'e'}{rr} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) - 2r \left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2} \right) \right\}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem Ausdrucke dieser für ein inducierendes Stromelement im 30. Artikel der angeführten Abhandlung S. 363 abgeleiteten Differenz bloss dadurch, dass $eudt$ an die Stelle von ae gesetzt ist. Ferner findet man auf die dort angegebene Weise für unsern Fall

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v \right) \cos \theta + u' \cos \theta' \\ \frac{dr_2}{dt} &= + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v \right) \cos \theta - u' \cos \theta' \\ \frac{dr_3}{dt} &= - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v \right) \cos \theta - u' \cos \theta' \\ \frac{dr_4}{dt} &= + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v \right) \cos \theta + u' \cos \theta' \end{aligned}$$

welche von den a. a. O. gefundenen Gleichungen sich nur dadurch unterscheiden, dass $+ \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v \right)$ statt $+u$ für die Geschwindigkeit der inducierenden positiven Elektrizität und $- \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v \right)$ statt $-u$ für die Geschwindigkeit der inducierenden negativen Elektrizität gesetzt und das von der Bewegung des inducierten Elements α' abhängige Glied weggelassen worden ist. Es ist also

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) = + 4 \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - \frac{1}{2} v \right) v \cos \theta^2$$

Die zweiten Differentialquotienten erhält man hieraus auf die dort angegebene Weise, wenn man berücksichtigt, dass hier u, u' und v gegebene constante Werthe haben, nämlich:

$$\frac{ddr_1}{dt^2} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin \theta \frac{d\theta_1}{dt} - u' \sin \theta' \frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{v}{\tau} \cos \theta$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin \theta \frac{d\theta_2}{dt} + u' \sin \theta' \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{v}{\tau} \cos \theta$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin \theta \frac{d\theta_3}{dt} + u' \sin \theta' \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{v}{\tau} \cos \theta$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin \theta \frac{d\theta_4}{dt} - u' \sin \theta' \frac{d\theta'_4}{dt} + \frac{v}{\tau} \cos \theta$$

Es ist also:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) &= + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin \theta \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) \\ &\quad - u' \sin \theta' \left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) \\ &\quad - v \sin \theta \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) - 4 \frac{v}{\tau} \cos \theta \end{aligned}$$

und man findet auf die dort angegebene Weise

$$r \frac{d\theta_1}{dt} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin \theta - u' \sin \theta' \cos \omega$$

$$r \frac{d\theta_2}{dt} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin \theta + u' \sin \theta' \cos \omega$$

$$r \frac{d\theta_3}{dt} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin \theta + u' \sin \theta' \cos \omega$$

$$r \frac{d\theta_4}{dt} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin \theta - u' \sin \theta' \cos \omega$$

$$r \frac{d\theta'_1}{dt} = - u' \sin \theta' + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin \theta \cos \omega$$

$$r \frac{d\theta'_2}{dt} = + u' \sin \theta' - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin \theta \cos \omega$$

$$r \frac{d\theta'_3}{dt} = + u' \sin \theta' + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin \theta \cos \omega$$

$$r \frac{d\theta'_4}{dt} = - u' \sin \theta' - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin \theta \cos \omega$$

Substituiert man diese Werthe, so ist

$$r \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = + 2v \sin \theta$$

$$r \left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = 0$$

$$r \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = - 2 \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin \theta$$

folglich:

$$r \left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = + 4 \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - \frac{1}{2} v\right) v \sin \theta^2 - 4 \frac{rv}{\tau} \cos \theta$$

woraus endlich die Differenz der Kräfte, welche auf die positive und negative Elektricität im Elemente α' wirken, und von welcher die Induction abhängt, sich ergibt, nämlich:

$$= -\frac{aa}{46} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{rr} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) - 2r \left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2} \right) \right\} \\ = -\frac{aa}{4} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{rr} \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - \frac{1}{2} v \right) v \left(\cos \theta^2 - 2 \sin \theta^2 \right) - \frac{aa}{2} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{r} \cdot \frac{v}{\tau} \cos \theta.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit dem Zeitelement $d\sigma$ und integriert von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \tau$, so erhält man den Integralwerth jener Differenz für die Dauer des Uebergangs τ

$$= -\frac{aa}{4} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{rr} \cdot uv\tau \cdot (\cos \theta^2 - 2 \sin \theta^2) - \frac{aa}{2} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{r} \cdot v \cos \theta$$

oder, wenn τ verschwindend klein ist, d. h. wenn der Wechsel der Geschwindigkeit in den elektrischen Fluidis an der Gleitstelle sehr schnell geschieht,

$$= -\frac{aa}{2} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{r} \cdot v \cos \theta.$$

Setzt man nun hierin, wie a. a. O. S. 367 angegeben ist, $aeu = i$ und multipliciert mit $\frac{\cos \theta'}{e'}$, so ergibt sich die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gegangenen Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha' v dt}{r} \cdot ai \cos \theta \cos \theta'.$$

Nun ist aber

$$v dt = \alpha$$

die Länge des in die Kette während des Zeitelements dt an der Gleitstelle neu eintretenden Leiterelements, in welchem also die Stromstärke von 0 bis i wächst. Bei dem Wachsthum der Stromintensität $\frac{di}{dt}$ in dem Elemente α ist aber die von diesem Elemente auf α' ausgeübte elektromotorische Kraft a. a. O. S. 367

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \alpha'}{r} a \cos \theta \cos \theta' \frac{di}{dt}$$

gefunden worden, folglich die elektromotorische Kraft für das Wachsthum der Stromintensität von 0 bis i

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \alpha'}{r} ai \cos \theta \cos \theta'$$

und setzt man endlich hierin für α seinen Werth $v dt$, so ersieht man, dass die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische

Kraft der von dem an der Gleitstelle in demselben Zeitelemente dt neu eintretenden Stromelemente αi auf das inducierte Element α' ausgeübten elektromotorischen Kraft sowohl der Grösse als auch der Richtung nach gleich ist, und dass man daher, um die erstere Kraft in Rechnung zu bringen, bloss die letztere Kraft zu verdoppeln brauche. Diese Verdoppelung ist aber, wie Neumann nachgewiesen hat, die Bedingung dafür, dass das aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleitete Inductionsgesetz mit den Resultaten aus Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme und mit der Erfahrung auch in dem Falle einer Gleitstelle übereinstimme. Diese Uebereinstimmung ist also hiermit nachgewiesen. Die plötzliche Aenderung, welche in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle eintritt, ist also die Ursache von elektromotorischen Kräften, welche Neumann bei der von ihm gegebenen Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht in Rechnung gebracht hat, und fügt man die Summe der aus dieser Quelle entspringenden elektromotorischen Kräfte der von Neumann gefundenen Summe hinzu, so findet sich der Widerspruch, welcher zwischen den Resultaten des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung und Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme zu bestehen schien, vollständig gelöst, was zu beweisen war.

Nach den hier entwickelten Gesetzen lassen sich endlich die Resultate aller in Art. 38 beschriebenen Versuche voraussagen. Bezeichnet man nämlich mit R den Halbmesser des von der Gleitstelle beschriebenen Kreises, von welchem die Halbmesser der inducierten Kreise R' nur wenig verschieden waren, und ist m die Zahl der letzten und n die Zahl der Umdrehungen des beweglichen Stromstücks per Zeiteinheit, i die Stärke des inducierenden Stroms und wird end-
Kürze halber

$$= \frac{RRR'R'}{(RR + R'R)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{15}{8} \left(\frac{RR'}{RR + R'R} \right)^2 + \frac{315}{64} \left(\frac{RR'}{RR + R'R} \right)^4 + \dots \right\}$$

setzt; so ergiebt sich aus obigen Gesetzen

$$1) \text{ die Summe der elektromotorischen Kräfte des beweglichen Stromstücks } = + mn\pi\pi \cdot \alpha i R_0$$

2) die Summe der elektromotorischen Kräfte der an der Gleitstelle plötzlich neu eintretenden Stromelemente (wenn die Wirkung ihres

woraus endlich die Differenz der Kräfte, welche auf die positive und negative Elektricität im Elemente α' wirken, und von welcher die Induction abhängt, sich ergibt, nämlich:

$$= -\frac{aa}{46} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{rr} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) - 2r \left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2} \right) \right\}$$

$$= -\frac{aa}{4} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{rr} \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - \frac{1}{2} v \right) v (\cos \theta^2 - 2 \sin \theta^2) - \frac{aa}{2} \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{r} \frac{v}{\tau} \cos \theta.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit dem Zeitelement $d\sigma$ und integriert von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \tau$, so erhält man den Integralwerth jener Differenz für die Dauer des Uebergangs τ

$$= -\frac{aa}{4} \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{rr} \cdot uv\tau \cdot (\cos \theta^2 - 2 \sin \theta^2) - \frac{aa}{2} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{r} \cdot v \cos \theta$$

oder, wenn τ verschwindend klein ist, d. h. wenn der Wechsel der Geschwindigkeit in den elektrischen Fluidis an der Gleitstelle sehr schnell geschieht,

$$= -\frac{aa}{2} \cdot \frac{eudt \cdot \alpha' e'}{r} \cdot v \cos \theta.$$

Setzt man nun hierin, wie a. a. O. S. 367 angegeben ist, $aeu = i$ und multipliciert mit $\frac{\cos \theta'}{e'}$, so ergibt sich die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gegangenen Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha' v dt}{r} \cdot ai \cos \theta \cos \theta'.$$

Nun ist aber

$$v dt = \alpha$$

die Länge des in die Kette während des Zeitelements dt an der Gleitstelle neu eintretenden Leiterelements, in welchem also die Stromstärke von 0 bis i wächst. Bei dem Wachsthum der Stromintensität $\frac{di}{dt}$ in dem Elemente α ist aber die von diesem Elemente auf α' ausgeübte elektromotorische Kraft a. a. O. S. 367

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \alpha'}{r} a \cos \theta \cos \theta' \frac{di}{dt}$$

gefunden worden, folglich die elektromotorische Kraft für das Wachsthum der Stromintensität von 0 bis i

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \alpha'}{r} ai \cos \theta \cos \theta'$$

und setzt man endlich hierin für α seinen Werth $v dt$, so ersieht man, dass die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische

Kraft der von dem an der Gleitstelle in demselben Zeitelemente dt neu eintretenden Stromelemente αi auf das inducierte Element α' ausgeübten elektromotorischen Kraft sowohl der Grösse als auch der Richtung nach gleich ist, und dass man daher, um die erstere Kraft in Rechnung zu bringen, bloss die letztere Kraft zu verdoppeln brauche. Diese Verdoppelung ist aber, wie Neumann nachgewiesen hat, die Bedingung dafür, dass das aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleitete Inductionsgesetz mit den Resultaten aus Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme und mit der Erfahrung auch in dem Falle einer Gleitstelle übereinstimme. Diese Uebereinstimmung ist also hiermit nachgewiesen. Die plötzliche Aenderung, welche in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle eintritt, ist also die Ursache von elektromotorischen Kräften, welche Neumann bei der von ihm gegebenen Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht in Rechnung gebracht hat, und fügt man die Summe der aus dieser Quelle entspringenden elektromotorischen Kräfte der von Neumann gefundenen Summe hinzu, so findet sich der Widerspruch, welcher zwischen den Resultaten des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung und Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme zu bestehen schien, vollständig gelöst, was zu beweisen war.

Nach den hier entwickelten Gesetzen lassen sich endlich die Resultate aller in Art. 38 beschriebenen Versuche voraussagen. Bezeichnet man nämlich mit R den Halbmesser des von der Gleitstelle beschriebenen Kreises, von welchem die Halbmesser der inducierten Kreise R' nur wenig verschieden waren, und ist m die Zahl der letzteren und n die Zahl der Umdrehungen des beweglichen Stromstücks in der Zeiteinheit, i die Stärke des inducierenden Stroms und wird endlich Kürze halber

$$R_o = \frac{RR'R'}{(RR + R'R)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{15}{8} \left(\frac{RR'}{RR + R'R} \right)^2 + \frac{315}{64} \left(\frac{RR'}{RR + R'R} \right)^4 + \dots \right\}$$

gesetzt; so ergiebt sich aus obigen Gesetzen

1) die Summe der elektromotorischen Kräfte des beweglichen Stromstücks $= + mn\pi\pi \cdot \alpha i R_o$

2) die Summe der elektromotorischen Kräfte der an der Gleitstelle allmählig neu eintretenden Stromelemente (wenn die Wirkung ihres

plötzlichen Verschwindens durch eine momentane Lösung der inducierten Kette bei jeder Umdrehung aufgehoben wird, wie im ersten Neumann'schen Versuche es der Fall war)

$$= - mn\pi\pi \cdot aiR_0$$

3) die Summe der elektromotorischen Kräfte der durch die Gleitstelle gehenden Elektrizität, wegen der plötzlichen Aenderung ihrer Geschwindigkeit in der Gleitstelle,

$$= - mn\pi\pi \cdot aiR_0.$$

Die Ableitung dieser Werthe siehe in der Beilage E. Aus diesen partiellen Summen lassen sich die ganzen elektromotorischen Kräfte für alle in Art. 38 beschriebenen Versuche leicht zusammensetzen. Es ergibt sich nämlich

a) für den ersten Neumann'schen Versuch die elektromotorische Kraft durch Addition aller drei partiellen Summen

$$= - mn\pi\pi \cdot aiR_0.$$

Dasselbe gilt für die beiden Wiederholungen dieses Versuchs, wenn nur für m der in jedem Versuche ihm zukommende Werth gesetzt wird. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Strom in den inducierten Kreisen die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom in dem kreisförmigen inducierenden Stromstücke, wenn letzteres durch die an der Gleitstelle neu eintretenden Elemente wächst.

b) Für den zweiten Neumann'schen Versuch, wo die elektromotorische Kraft der an der Gleitstelle neu eintretenden Stromelemente durch das plötzliche Verschwinden derselben am Ende jeder Umdrehung aufgehoben wurde, fällt die partielle Summe unter (2) weg, und es sind bloss die beiden partiellen Summen unter (1) und (3) zu addieren, welche die elektromotorische Kraft geben

$$= 0.$$

Dasselbe gilt für die Wiederholung dieses Versuchs, so wie auch für diejenige Modification desselben, wo dieselbe Wirkung, welche durch das plötzliche Verschwinden aller während einer Umdrehung allmählig neu eingetretenen Stromelemente am Ende der Umdrehung hervorgebracht wurde, durch eine Stromtheilung erreicht worden ist.

c) Es bleiben also nur noch diejenigen Versuche übrig, wo der inducierende Strom, welcher durch einen kreisförmigen Leiter ging, eine Intensitätsänderung erlitt, entweder von 0 bis i oder von i bis 0, und wobei dieser Strom entweder gar nicht durch das bewegliche Stück

des Leiters geführt wurde, oder dieses Stück, während der Strom durchging, nicht bewegt wurde. Für diese Versuche fallen die partiellen Summen unter (1) und (3) ganz weg und es bleibt als elektromotorische Kraft bloss die partielle Summe unter (2), worin für n der Werth $= 1$ zu setzen ist, also

$$= - m\pi\pi \cdot aiR_0.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass bei Schliessung der Kette der Strom im inducierten Kreise die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom im inducierenden Kreise.

Alle diese elektromotorischen Kräfte sind nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt und können nach Art. 27 durch Multiplication mit $\frac{c}{4} = \frac{1}{a}$ auf das Art. 26 definierte absolute Maass zurückgeführt werden. Durch diese Reduction fällt der unbekannte Factor a in dem Ausdrucke jener Kräfte weg und der reducierte Werth kann durch Messung bestimmt werden. Uebrigens geben obige Ausdrücke die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft oder den Integralwerth derselben für die Zeiteinheit in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert. Für diejenigen Versuche dagegen, wo die Wirkung nur eine momentane ist, geben obige Ausdrücke den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für die ganze Dauer der Wirkung. Bezeichnet T_0 im Allgemeinen die Zeit, für welche der gefundene Integralwerth der elektromotorischen Kraft gilt (wonach also in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert, $T_0 = 1$ zu setzen ist); so ergibt sich die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft durch Division des gefundenen Integralwerths mit T_0 und kann also für (1), (2) und (3) dargestellt werden durch

$$\pm mn\pi\pi \cdot \frac{R_0}{T_0} \cdot i,$$

wo m die Zahl der inducierten Kreise und n die Zahl der Umdrehungen bezeichnet. Dividirt man diese mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft mit dem Widerstande der inducierten Kette, wie er nach dem Art. 26 definierten Maasse gefunden wird, so erhält man die mittlere Intensität des inducierten Stroms. Nun hat sich aber ergeben, dass der Widerstand nach dem angegebenen Maasse durch

$$p \cdot \frac{R'}{T'}$$

dargestellt werden kann, wo p eine reine Zahl ist, R' dagegen, gleich-

wie R_0 , auf das gewählte Raummaass, T' gleichwie T_0 auf das gewählte Zeitmaass sich beziehen; folglich ergibt sich für die mittlere Intensität des inducierten Stroms der Ausdruck

$$+ \frac{mn\pi\pi}{p} \cdot \frac{R_0}{R'} \cdot \frac{T'}{T_0} \cdot i,$$

wo $\frac{mn\pi\pi}{p} \cdot \frac{R_0}{R'} \cdot \frac{T'}{T_0}$ eine aus den Messungen zu berechnende reine Zahl ist, welche das Verhältniss der Stärke des inducierten Stroms zum inducierenden angiebt. Es ist hierdurch die Möglichkeit gegeben, auch die Stärke des inducierten Stroms nach dem gegebenen Maasse vorauszusagen.

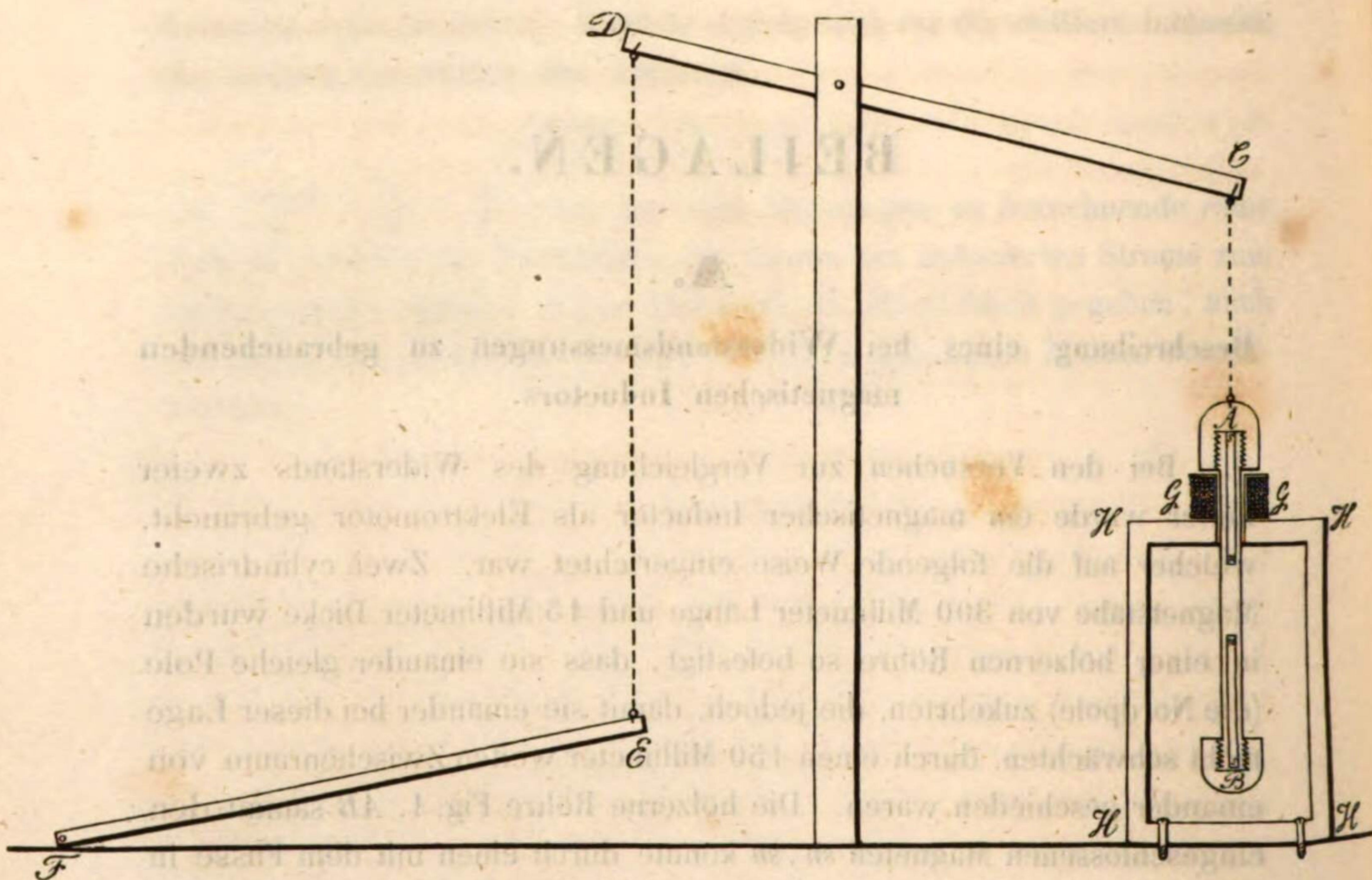
BEILAGEN.

A.

Beschreibung eines bei Widerstandsmessungen zu gebrauchenden magnetischen Inductors.

Bei den Versuchen zur Vergleichung des Widerstands zweier Leiter wurde ein magnetischer Inductor als Elektromotor gebraucht, welcher auf die folgende Weise eingerichtet war. Zwei cylindrische Magnetstäbe von 300 Millimeter Länge und 15 Millimeter Dicke wurden in einer hölzernen Röhre so befestigt, dass sie einander gleiche Pole (die Nordpole) zukehrten, die jedoch, damit sie einander bei dieser Lage nicht schwächten, durch einen 150 Millimeter weiten Zwischenraum von einander geschieden waren. Die hölzerne Röhre Fig. 4. *AB* sammt den eingeschlossenen Magneten *sn*, *sn* konnte durch einen mit dem Fusse in Bewegung zu setzenden Hebelapparat *CDEF* senkrecht gehoben und wieder gesenkt und durch die Höhle einer Inductorrolle *GG* hin- und hergeschoben werden, welche unbeweglich auf der obern Seite des am Fussboden angeschraubten Gestelles *HHHH* befestigt war. Fig. 4 stellt diesen Apparat in seinem Höhendurchschnitt dar (s. S. 336). Die Südpole der beiden Magnetstäbe sind mit *s*, die Nordpole mit *n* bezeichnet. Die Holzhöhre, in welcher die beiden Magnetstäbe befestigt sind, ist an beiden Enden mit aufgeschraubten Deckeln verschlossen. Wird die Röhre in der Inductorrolle so weit abwärts geschoben, dass, wie in Fig. 4, der obere Deckel an die Inductorrolle *GG* anstösst, so befindet sich die Mitte des oberen Magnetstabs im Mittelpunkte der Inductorrolle; wird dagegen die Röhre so weit aufwärts geschoben, dass der untere Deckel an das Gestell *HH*, auf welcher die Inductorrolle *GG* befestigt ist, anstösst, so befindet sich die Mitte des unteren Magnetstabs im Mittelpunkte der Inductorrolle. In diesen beiden äussersten Lagen ist die Induction Null, weil die elektromotorischen Kräfte der zu beiden Seiten der Inductorrolle symmetrisch gelegenen Pole, wenn beide zugleich nach oben oder unten bewegt werden, sich aufheben. Während

Fig. 1.



der ganzen Schiebung der Röhre von unten nach oben geschieht die Induction in gleichem Sinne und ist am stärksten während des Durchgangs der beiden Nordenden der Magnetstäbe durch die Inductionsrolle. Während der ganzen Schiebung in der entgegengesetzten Richtung, von oben nach unten, geschieht die Induction im entgegengesetzten Sinne. Eine jede solche Bewegung heisst ein Inductionsstoss, und zwar ein positiver oder negativer, je nachdem die Schiebung aufwärts oder abwärts geschieht. — Dass jeder Inductionsstoss mit einer Lage beginnt und endigt, für welche die Induction Null ist, hat den Zweck, dass der ganze Werth der einem Inductionsstosse entsprechenden Induction ein Maximum sei und unverändert bleibe, auch wenn jene äussersten Lagen nicht ganz genau erreicht würden. Die einfache Schiebung, durch welche ein solcher ganzer Inductionsstoss bewerkstelligt wird, gestattet eine sehr rasche Ausführung und eignet sich daher besonders zu Messungen, wo die Inductionsstösse genau in den Augenblicken stattfinden sollen, in welchen die Galvanometernadel durch ihre Gleichgewichtslage geht. Um diese Augenblicke recht genau einhalten zu können, ist die Einrichtung getroffen, dass der positive Inductionsstoss, d. h.

die Schiebung von unten nach oben, durch Niedersetzen des Fusses auf dem Hebel *EF* bewerkstelligt wird, während der negative Inductionsstoss, d. h. die Schiebung von oben nach unten, durch das Gewicht des Inductors von selbst erfolgt, sobald der niedergesetzte Fuss wieder aufgehoben wird. Auf diese Weise kann der Beobachter, welcher den Gang der Galvanometernadel mit dem Fernrohre verfolgt, ohne das Fernrohr zu verlassen, den Inductionsstoss genau in dem Augenblicke geben, wo er die Nadel ihre Gleichgewichtslage passieren sieht.

B.

Beschreibung des Galvanometers.

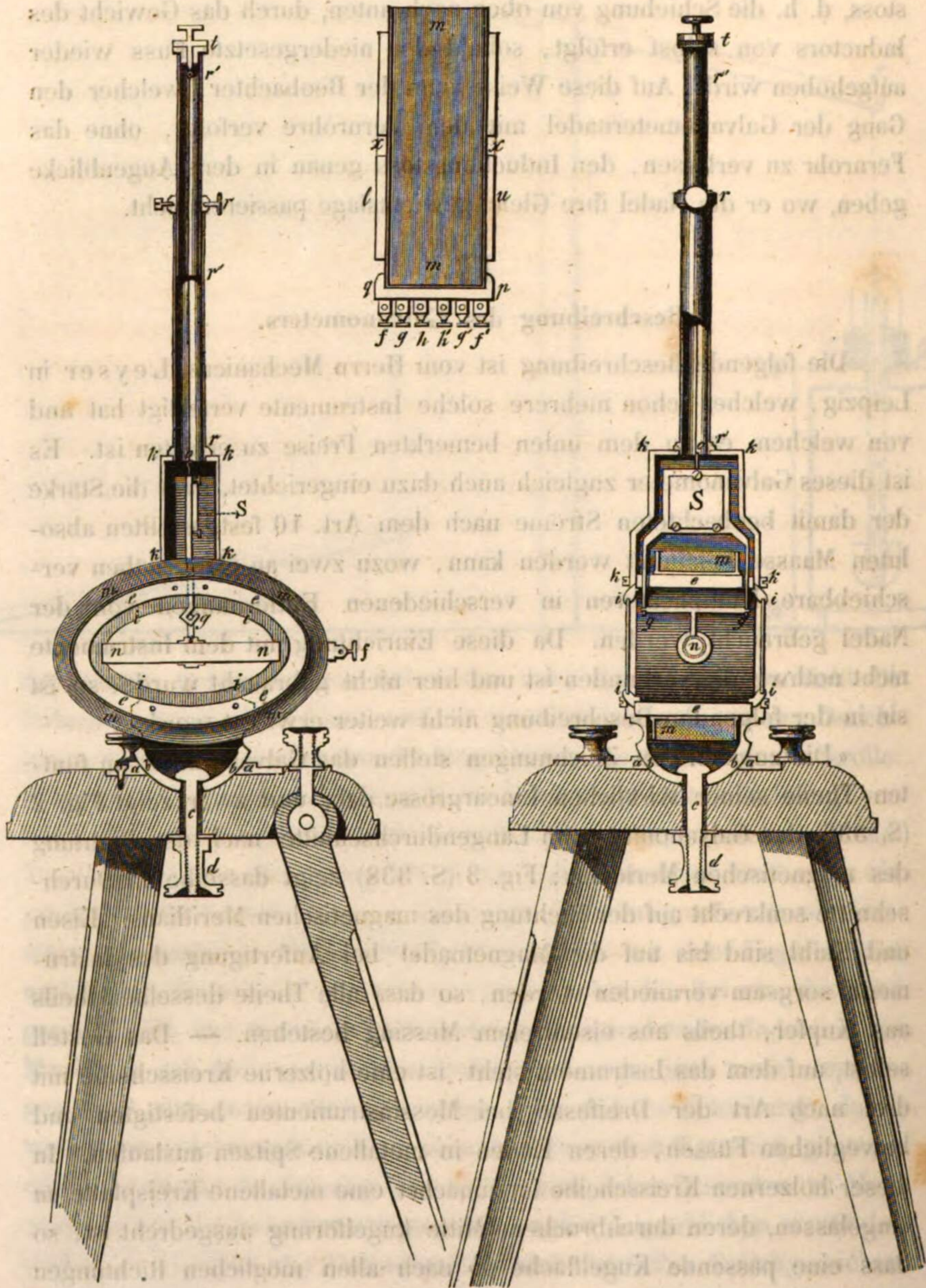
Die folgende Beschreibung ist vom Herrn Mechanicus Leyser in Leipzig, welcher schon mehrere solche Instrumente verfertigt hat und von welchem es zu dem unten bemerkten Preise zu erhalten ist. Es ist dieses Galvanometer zugleich auch dazu eingerichtet, dass die Stärke der damit beobachteten Ströme nach dem Art. 10 festgestellten absoluten Maasse bestimmt werden kann, wozu zwei an Maassstäben verschiebbare Multiplicatoren in verschiedenen Entfernungen von der Nadel gebraucht werden. Da diese Einrichtung mit dem Instrumente nicht nothwendig verbunden ist und hier nicht gebraucht wurde, so ist sie in der folgenden Beschreibung nicht weiter erwähnt worden.

«Die zugehörigen Zeichnungen stellen das Galvanometer im fünften Theile seiner wirklichen Lineargrösse dar, und zwar zeigt Fig. 2 (S. 338) das Galvanometer im Längendurchschnitte nach der Richtung des magnetischen Meridians; Fig. 3 (S. 338) zeigt dasselbe im Durchschnitte senkrecht auf der Richtung des magnetischen Meridians. Eisen und Stahl sind bis auf die Magnetnadel bei Anfertigung des Instruments sorgsam vermieden worden, so dass alle Theile desselben theils aus Kupfer, theils aus eisenfreiem Messing bestehen. — Das Gestell selbst, auf dem das Instrument steht, ist eine hölzerne Kreisscheibe mit drei nach Art der Dreifüsse bei Messinstrumenten befestigten und beweglichen Füßen, deren Enden in metallene Spitzen auslaufen. In dieser hölzernen Kreisscheibe ist zunächst eine metallene Kreisplatte *aa* eingelassen, deren durchbrochene Mitte kugelförmig ausgedreht ist, so dass eine passende Kugelfläche *bb* nach allen möglichen Richtungen sich einstellen und mittelst eines Bolzens *c* und einer Schraubenmutter *d* an der Kreisplatte *aa* feststellen lässt. Auf der erwähnten Kugelfläche *bb*

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 3.



ist nun das eigentliche Galvanometer befestigt. Zu diesem Zwecke setzt sich diese Kugelfläche *bb* nach oben in zwei parallele Seitenplatten fort, die in Fig. 2 durch punktierte Linien angedeutet, in Fig. 3 dagegen deutlich zu sehen sind. Zwischen diesen Seitenplatten ist der kupferne Dämpfer *eeee* in Form eines oval gebogenen, in sich selbst zurückkehrenden Ringes von 80 Millimeter Breite und 8 Millimeter Stärke mit zwei Schrauben zu jeder Seite befestigt. Der Durchschnitt dieses kupfernen Dämpfers ist eine Ellipse, in deren grosser Axe die Magnetnadel *nm* schwebt. Ueber diesen Dämpfer lässt sich ein aus dünnem Messingblech angefertigter Rahmen seitwärts überschieben, der, mit aufrechtstehenden Wänden versehen, eine Quantität übersponnenen Kupferdrahts aufnimmt und somit über dem Dämpfer noch einen Multiplikator *mmmm* darstellt. Die Drahtwindungen dieses Multiplikators laufen ellipsenförmig um den Dämpfer herum, bestehen aus neun concentrischen Lagen über einander, jede Lage aus 80 neben einander gelegenen Umwindungen; der Draht hat gegen $\frac{2}{3}$ Millimeter Stärke. Hierbei ist die Einrichtung getroffen, den Multiplikator bald ganz, bald theilweise, in drei Abtheilungen zu drei Lagen, gebrauchen zu können. Auch lassen sich diese drei Abtheilungen so verbinden, dass sie gleichzeitig von demselben Strome durchlaufen werden, der sich zwischen ihnen theilt. Die Einrichtung, welche zu diesem Zwecke dem Multiplikator gegeben ist, wird durch Fig. 4 (S. 338) deutlich, welche den Multiplikator von oben herab gesehen darstellt; *qp* ist ein Querstäbchen von Buchsbaumholz, welches an den vorstehenden Wänden des Rahmens für den Multiplikator *mm* befestigt ist. Die erste Abtheilung des Multiplikators beginnt mit der ersten oder untersten Lage der Windungen, deren Anfang am Knöpfchen *f* ist; sie geht um den kupfernen Dämpfer herum nach dessen rechter Seite *u* und bildet so die erste Lage; dann wendet sie sich nach der linken Seite *l* und bildet auf diese Weise die zweite Lage; hierauf geht sie nochmals nach der rechten Seite *u*, und so entsteht die dritte Lage, deren Ende sich am Knöpfchen *f'* befindet. Ganz analog nun, wie diese erste Abtheilung des Multiplikators drei Lagen bildet und ihren Anfang in *f*, ihr Ende in *f'* hat, eben so hat die zweite und dritte Abtheilung jede drei Lagen; der Anfang der zweiten Abtheilung aber ist in *g*, ihr Ende in *g'*; der Anfang der dritten Abtheilung endlich ist in *h*, ihr Ende in *h'*. — Diese sechs Knöpfchen von Kupfer sind kreuzweise durchbohrt und mit Schraubchen fest, aber

isoliert von einander, in dem buchsbaumenen Querstäbchen *qp* eingesetzt. Bei dieser Anordnung des Multipliers ersieht man leicht, dass sich die drei Abtheilungen, aus denen der Multiplier besteht, auf verschiedene Weise, je nachdem die Knöpfchen durch Drähte verbunden werden, combinieren lassen. — Ueber dem Dämpfer *eeee*, und an ihm mit Schrauben befestigt, befindet sich ein Rähmchen *kkkk*, welches, indem die eine seiner offenen Seiten durch eine schwache Metallplatte, die andere durch ein Planglas mit parallelen Oberflächen verschlossen ist, einen viereckigen geschlossenen Raum darstellt. Darüber ist noch ein Rohr *rr* angebracht, welches durch ein stellbares graduiertes Auszugsrohr *r'r'* verlängert oder verkürzt werden kann. Dieses Auszugsrohr *r'r'* schliesst mit einem Torsionskreise *t*, dessen Construction unmittelbar aus den Figuren erhellt. Dieser Torsionskreis hat eine kleine Oese, in welcher der Coconfaden befestigt ist, der im Innern des vereinigten Rohres herabhängt und an einem Häkchen *o* eine viereckige leichte Metallplatte trägt, an der ein Planspiegel *s* mit drei Schraubchen befestigt ist. Diese viereckige Platte geht nach unten weiter und zwar durch zwei an dem Dämpfer *eeee* seitlich angebrachte Ausschnitte (Fig. 4 durch *xx* angedeutet), als zwei schwache Stäbchen, deren Enden als die Haken *gg* in den Figuren erscheinen. In diese Haken wird die Magnetnadel *mn* eingelegt, zu welchem Ende sie in der Mitte von einer schmalen Hülse umgeben und mit einem an dieser Hülse befestigten Querbälkchen versehen ist, dessen Enden walzenförmig auslaufen und in jenen Häkchen *gg* eingelegt werden. Die Lage der Nadel hinsichtlich ihrer Höhe wird durch das Auszugsrohr *r'r'* reguliert; durch Drehung des Torsionskreises *t* kann die Torsion des Fadens auf Null gebracht werden; mittelst der Kugelbewegung aber, welche die Kugel-*fläche* *bb* mit der Platte *aa* zulässt, kann das ganze System des Instruments stets vertical eingestellt werden, welche Einstellung am leichtesten geschieht, wenn man das Auszugsrohr in der Nähe des Torsionskreises anfasst und bei sehr sanfter Anziehung der Schraube *d* die Einstellung vornimmt, die man dann bei erhaltener richtiger Lage des Instruments durch Anziehung der Schraube *d* feststellt. Die nach beiden Seiten noch offenen Durchsichten des Dämpfers *eeee* sind durch Einsetzen verglasten Holzrähmchen zu schliessen, deren Durchschnitt in *iii* anschaulich gemacht ist. Der Preis des Instruments mit der Einrichtung zu absoluten Messungen ist 80 Thlr., ohne dieselbe 60 Thlr.»

C.**Uebersicht der Beobachtungsmethoden für galvanische Messungen mit Rücksicht auf den Einfluss der Dämpfung.**

Bei den galvanischen Messungen wird gewöhnlich nur derjenige galvanische Strom in Rechnung gebracht, welcher, ausserhalb des Multiplicators erregt, durch denselben geleitet wird, um durch die der Nadel ertheilte Ablenkung gemessen zu werden. Ist dieser Strom constant und wird die Ablenkung der Nadel nicht eher gemessen, als bis sie zur Ruhe gekommen ist, so hängt die Ablenkung der Nadel wirklich bloss von diesem Strome ab; ist der Strom aber nicht constant, oder dauert er nur sehr kurze Zeit, und beobachtet man die Ablenkung, ehe die Nadel zur Ruhe gekommen ist, beobachtet man z. B. die erste Elongation der Nadel; so sind ausser dem zu messenden Strome noch andere Ströme vorhanden, die häufig einen grossen Einfluss auf die Beobachtungen haben, der nicht unbeachtet bleiben darf. Diese Ströme rühren von der Bewegung der Magnetnadel her, welche in allen sie umgebenden Leitern galvanische Ströme induciert, deren Intensität dem Magnetismus der Nadel und der Geschwindigkeit proportional ist, mit welcher sie sich bewegt, und deren Richtung stets so beschaffen ist, dass durch ihre Rückwirkung auf die Nadel die vorhandene Bewegung derselben verlangsamt oder gedämpft wird.

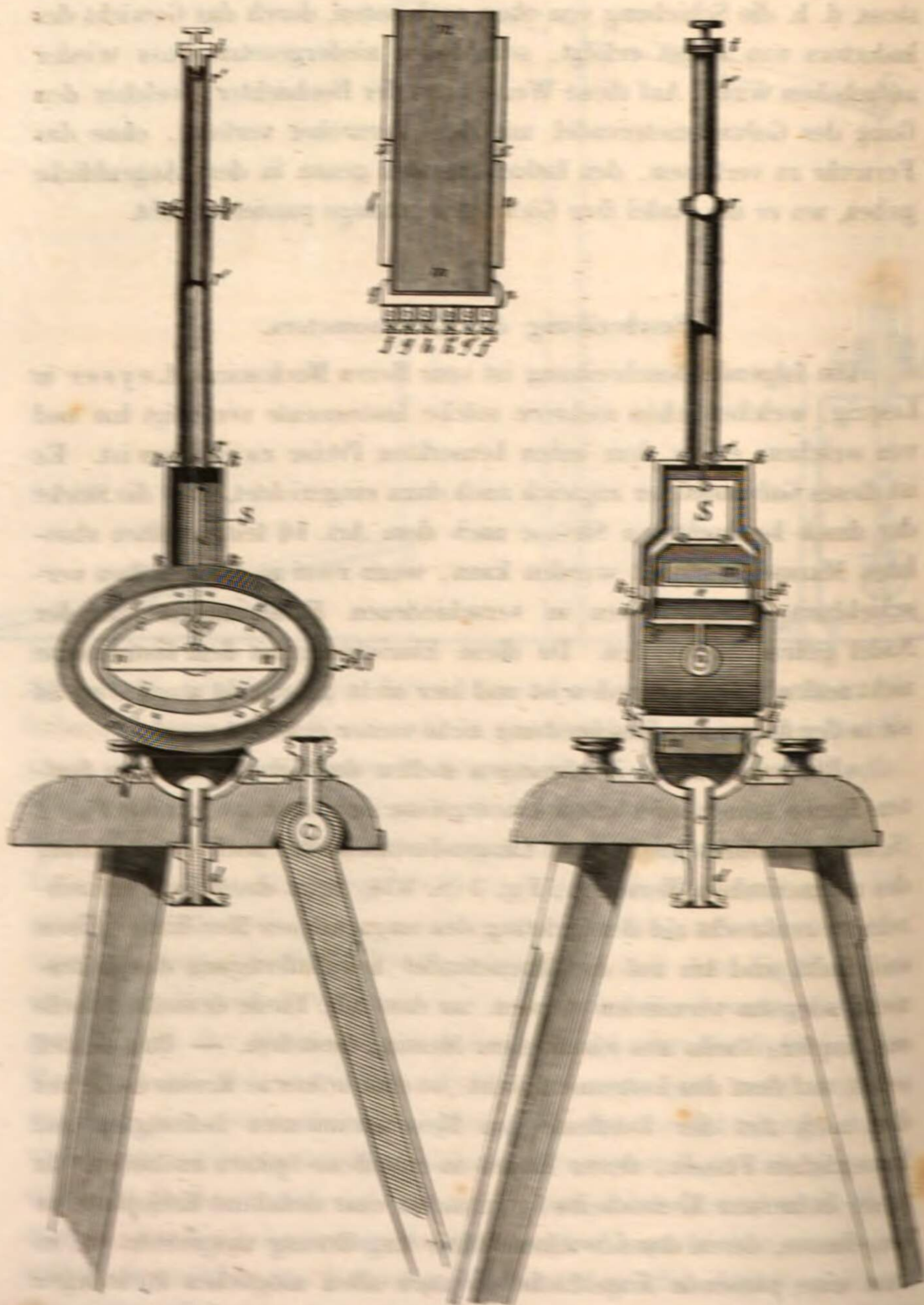
Ein solcher Strom wird von der bewegten Magnetnadel erstens im Multiplicator selbst induciert und ist desto stärker, je grösser der metallische Querschnitt des ganzen Multiplicators und je grösser der Theil ist, welchen der Widerstand des Multiplicators von dem Widerstande der ganzen Kette bildet: er ist am stärksten, wenn der Multiplicator in sich geschlossen wird, und ist am schwächsten, wenn die Kette des Multiplicators gelöst wird.

Ein solcher Strom wird zweitens von der bewegten Magnetnadel auch in allen Metalltheilen des Instruments erregt, und die Rückwirkung auf die Magnetnadel ist besonders stark, wenn verticale Platten in der Richtung des magnetischen Meridians nahe an der Nadel sich befinden, oder wenn die Nadel von einem verticalen Metallringe umgeben ist, weshalb ein solcher Ring, wenn er absichtlich zu diesem Zwecke ange-

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 3.



ist nun das eigentliche Galvanometer befestigt. Zu diesem Zwecke setzt sich diese Kugelfläche *bb* nach oben in zwei parallele Seitenplatten fort, die in Fig. 2 durch punktierte Linien angedeutet, in Fig. 3 dagegen deutlich zu sehen sind. Zwischen diesen Seitenplatten ist der kupferne Dämpfer *eeee* in Form eines oval gebogenen, in sich selbst zurückkehrenden Ringes von 80 Millimeter Breite und 8 Millimeter Stärke mit zwei Schrauben zu jeder Seite befestigt. Der Durchschnitt dieses kupfernen Dämpfers ist eine Ellipse, in deren grosser Axe die Magnetnadel *m* schwebt. Ueber diesen Dämpfer lässt sich ein aus dünnem Messingblech angefertigter Rahmen seitwärts überschieben, der, mit aufrechtstehenden Wänden versehen, eine Quantität übersponnenen Kupferdrahts aufnimmt und somit über dem Dämpfer noch einen Multiplikator *mmmm* darstellt. Die Drahtwindungen dieses Multiplikators liegen ellipsenförmig um den Dämpfer herum, bestehen aus neun concentrischen Lagen über einander, jede Lage aus 80 neben einander liegenden Umwindungen; der Draht hat gegen $\frac{2}{3}$ Millimeter Stärke. Dabei ist die Einrichtung getroffen, den Multiplikator bald ganz, bald theilweise, in drei Abtheilungen zu drei Lagen, gebrauchen zu können. Man lässt sich diese drei Abtheilungen so verbinden, dass sie gleich von demselben Strome durchlaufen werden, der sich zwischen theilt. Die Einrichtung, welche zu diesem Zwecke dem Multiplikator gegeben ist, wird durch Fig. 4 (S. 338) deutlich, welche den Multiplikator von oben herab gesehen darstellt; *qp* ist ein Querstäbchen aus Buchsbaumholz, welches an den vorstehenden Wänden des Rahmens des Multiplikators *mm* befestigt ist. Die erste Abtheilung des Multiplikators beginnt mit der ersten oder untersten Lage der Windungen, deren Anfang am Knöpfchen *f* ist; sie geht um den kupfernen Dämpfer nach dessen rechter Seite *u* und bildet so die erste Lage; dann geht sie nach der linken Seite *l* und bildet auf diese Weise die zweite Lage; hierauf geht sie nochmals nach der rechten Seite *u*, und bildet die dritte Lage, deren Ende sich am Knöpfchen *f'* befindet. So nun, wie diese erste Abtheilung des Multiplikators drei Lagen hat und ihren Anfang in *f*, ihr Ende in *f'* hat, eben so hat die zweite Abtheilung jede drei Lagen; der Anfang der zweiten Abtheilung ist in *g*, ihr Ende in *g'*; der Anfang der dritten Abtheilung ist in *h*, ihr Ende in *h'*. — Diese sechs Knöpfchen von oben kreuzweise durchbohrt und mit Schraubchen fest, aber

isoliert von einander, in dem buchsbaumenen Querstäbchen *qp* eingesetzt. Bei dieser Anordnung des Multipliers ersieht man leicht, dass sich die drei Abtheilungen, aus denen der Multiplier besteht, auf verschiedene Weise, je nachdem die Knöpfchen durch Drähte verbunden werden, combinieren lassen. — Ueber dem Dämpfer *eeee*, und an ihm mit Schrauben befestigt, befindet sich ein Rähmchen *kkkk*, welches, indem die eine seiner offenen Seiten durch eine schwache Metallplatte, die andere durch ein Planglas mit parallelen Oberflächen verschlossen ist, einen viereckigen geschlossenen Raum darstellt. Darüber ist noch ein Rohr *rr* angebracht, welches durch ein stellbares graduiertes Auszugsrohr *r'r'* verlängert oder verkürzt werden kann. Dieses Auszugsrohr *r'r'* schliesst mit einem Torsionskreise *t*, dessen Construction unmittelbar aus den Figuren erhellt. Dieser Torsionskreis hat eine kleine Oese, in welcher der Coconfaden befestigt ist, der im Innern des vereinigten Rohres herabhängt und an einem Häkchen *o* eine viereckige leichte Metallplatte trägt, an der ein Planspiegel *s* mit drei Schraubchen befestigt ist. Diese viereckige Platte geht nach unten weiter und zwar durch zwei an dem Dämpfer *eeee* seitlich angebrachte Ausschnitte (Fig. 4 durch *xx* angedeutet), als zwei schwache Stäbchen, deren Enden als die Haken *gg* in den Figuren erscheinen. In diese Haken wird die Magnetnadel *nn* eingelegt, zu welchem Ende sie in der Mitte von einer schmalen Hülse umgeben und mit einem an dieser Hülse befestigten Querbälkchen versehen ist, dessen Enden walzenförmig auslaufen und in jenen Häkchen *gg* eingelegt werden. Die Lage der Nadel hinsichtlich ihrer Höhe wird durch das Auszugsrohr *r'r'* reguliert; durch Drehung des Torsionskreises *t* kann die Torsion des Fadens auf Null gebracht werden; mittelst der Kugelbewegung aber, welche die Kugelfläche *bb* mit der Platte *aa* zulässt, kann das ganze System des Instruments stets vertical eingestellt werden, welche Einstellung am leichtesten geschieht, wenn man das Auszugsrohr in der Nähe des Torsionskreises anfasst und bei sehr sanfter Anziehung der Schraube *d* die Einstellung vornimmt, die man dann bei erhaltener richtiger Lage des Instruments durch Anziehung der Schraube *d* feststellt. Die nach beiden Seiten noch offenen Durchsichten des Dämpfers *eeee* sind durch Einsetzen verglaster Holzrähmchen zu schliessen, deren Durchschnitt in *iiii* anschaulich gemacht ist. Der Preis des Instruments mit der Einrichtung zu absoluten Messungen ist 80 Thlr., ohne dieselbe 60 Thlr.

C.**Uebersicht der Beobachtungsmethoden für galvanische Messungen mit Rücksicht auf den Einfluss der Dämpfung.**

Bei den galvanischen Messungen wird gewöhnlich nur derjenige galvanische Strom in Rechnung gebracht, welcher, ausserhalb des Multiplicators erregt, durch denselben geleitet wird, um durch die der Nadel ertheilte Ablenkung gemessen zu werden. Ist dieser Strom *constant* und wird die Ablenkung der Nadel nicht eher gemessen, als bis sie zur Ruhe gekommen ist, so hängt die Ablenkung der Nadel wirklich bloss von diesem Strome ab; ist der Strom aber nicht constant, oder dauert er nur sehr kurze Zeit, und beobachtet man die Ablenkung, ehe die Nadel zur Ruhe gekommen ist, beobachtet man z. B. die erste Elongation der Nadel; so sind ausser dem zu messenden Strome noch andere Ströme vorhanden, die häufig einen grossen Einfluss auf die Beobachtungen haben, der nicht unbeachtet bleiben darf. Diese Ströme rühren von der Bewegung der Magnetnadel her, welche in allen sie umgebenden Leitern galvanische Ströme induciert, deren Intensität dem Magnetismus der Nadel und der Geschwindigkeit proportional ist, mit welcher sie sich bewegt, und deren Richtung stets so beschaffen ist, dass durch ihre Rückwirkung auf die Nadel die vorhandene Bewegung derselben verlangsamt oder gedämpft wird.

Ein solcher Strom wird von der bewegten Magnetnadel erstens im Multiplicator selbst induciert und ist desto stärker, je grösser der magnetische Querschnitt des ganzen Multiplicators und je grösser der Widerstand ist, welchen der Widerstand des Multiplicators von dem Widerstand der ganzen Kette bildet: er ist am stärksten, wenn der Multiplicator geschlossen wird, und ist am schwächsten, wenn die Kette des Multiplicators gelöst wird.

Ein solcher Strom wird zweitens von der bewegten Magnetnadel in allen Metalltheilen des Instruments erregt, und die Rückwirkung auf die Magnetnadel ist besonders stark, wenn verticale Platten in der Nähe des magnetischen Meridians nahe an der Nadel sich befinden, wenn die Nadel von einem verticalen Metallringe umgeben ist, oder ein solcher Ring, wenn er absichtlich zu diesem Zwecke ange-

bracht wird, ein Dämpfer heisst. Die Anwendung eines solchen Dämpfers gewährt bei den meisten Messungen nicht allein eine grosse Erleichterung, sondern gestattet oft auch eine grössere Präcision der Beobachtungen. Siehe die «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837.» S. 48.

Es kommt nun darauf an, die Resultate der Beobachtungen von dem dämpfenden Einflusse dieser beiden Ströme unabhängig zu machen, oder die wegen der Dämpfung an den Beobachtungen anzubringende Correction zu bestimmen. Diese Correction wird besonders wichtig und bedeutend, wenn man sich zu galvanischen Messungen entweder eines mit Dämpfer versehenen Magnetometers oder einer astatischen Doppelnadel bedient, die aus zwei stärkeren Magneten zusammengesetzt ist, und entweder ebenfalls mit Dämpfer versehen, oder von einem starken Multiplicator eng umschlossen ist. Besonders im letzteren Falle, wo die Dämpfung vom Multiplicator herrührt und sehr verschieden sein kann bei verschiedener Schliessung des Multiplicators, ist eine solche Correction nothwendig, um die Versuche unter einander vergleichbar zu machen.

Zur Bestimmung dieser Correction soll erstens die Dämpfungskraft des Instruments näher bestimmt werden, was durch die Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen leicht geschehen kann. Sodann soll zweitens gezeigt werden, wie der Einfluss dieser Dämpfungskraft bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate bestimmt oder eliminiert wird.

1. Bestimmung der Dämpfungskraft eines Galvanometers.

Die Dämpfungskraft eines Galvanometers zerfällt in zwei Theile, welche von einander getrennt werden müssen, nämlich in einen constanten, von der Kette, zu welcher der Multiplicator gehört, unabhängigen Theil, und in einen variablen.

Den constanten Theil der Dämpfungskraft erhält man durch Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen, während die Kette, zu welcher der Multiplicator gehört, gelöst ist. Die Schwingungsbogen bilden bekanntlich, wenn sie nicht sehr gross sind, eine abnehmende geometrische Reihe, welche dargestellt werden kann durch Ae^0 ; $Ae^{-\lambda}$; $Ae^{-2\lambda}$ $Ae^{-n\lambda}$, wo n die Zahl der Schwingungen be-

zeichnet, welche die Nadel, von dem Augenblicke, wo der Bogen $= A$ war, an gerechnet, gemacht hat. Während der Dauer einer Schwingung nimmt also der Bogen in dem Verhältnisse

$$e^{\lambda'} : 1,$$

während der Dauer zweier Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{2\lambda'} : 1,$$

während der Dauer von n Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{n\lambda'} : 1$$

ab. Nimmt man hiernach den Exponenten λ' als Maass der Dämpfung während der Dauer einer Schwingung, oder während τ' Secunden, wenn τ' die Schwingungsdauer der Nadel in Secunden ausdrückt, so ist $2\lambda'$ das Maass der Dämpfung für $2\tau'$ Secunden, und $n\lambda'$ ist das Maass für $n\tau'$ Secunden. Das Verhältniss der so bestimmten Dämpfungskräfte zu den Zeiträumen, auf welche sie sich beziehen, giebt dann endlich die Constante $\frac{\lambda'}{\tau'} = \frac{2\lambda'}{2\tau'} = \frac{n\lambda'}{n\tau'}$, welche das auf die Zeiteinheit reducierte Maass der Dämpfung ausdrückt. λ' ist aber nichts Anderes als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, und τ' ist die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung; man erhält also das auf die Zeiteinheit reducierte Maass der Dämpfung, wenn man jenen Logarithmus mit dieser Schwingungsdauer, die sich beide aus den Beobachtungen leicht bestimmen lassen, dividirt.

Zur Bestimmung des variablen Theils der Dämpfungskraft wird die Abnahme der Schwingungsbogen beobachtet, während der Multiplicator in sich selbst geschlossen ist. Ist $e^{\lambda''} : 1$ das durch die Beobachtung gefundene Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen und τ'' die Schwingungsdauer, so ist das Maass der Dämpfung für die Zeiteinheit

$$= \frac{\lambda''}{\tau''}.$$

Die Dämpfungskraft des in sich selbst geschlossenen Multiplicators für sich ergibt sich hieraus

$$= \frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}.$$

In den meisten Fällen ist der Unterschied der Schwingungsdauer τ'' von τ' unmerklich und es wird dann das Maass der Dämpfung des in sich selbst geschlossenen Multiplicators

$$= \frac{1}{\tau'} (\lambda'' - \lambda').$$

Hieraus bestimmt sich nun der variable Theil der Dämpfung, wenn man den Bruchtheil kennt, welchen der Widerstand des Multiplicators von dem der ganzen Kette bildet. Bezeichnet a den Widerstand des Multiplicators, $a + b$ den Widerstand der ganzen Kette, so ist der gesuchte Werth des variablen Theils der Dämpfung

$$= \frac{a}{a+b} \left(\frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'} \right),$$

worin bloss b veränderlich ist und für jeden einzelnen Fall besonders bestimmt werden muss. Fügt man hierzu das Maass des constanten Theils der Dämpfung $= \frac{\lambda'}{\tau'}$, so giebt die Summe den Werth der wirklichen Dämpfung $= \frac{\lambda}{\tau}$

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\lambda''}{\tau''} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{\lambda'}{\tau'},$$

wo für den betreffenden Fall λ den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, τ die Schwingungsdauer bezeichnet.

2. Berechnung der galvanischen Messungen mit Rücksicht auf Dämpfung.

Hat man auf diese Weise die Dämpfungskraft des Instruments bestimmt, so lässt sich diese Bestimmung benutzen, um bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate den Einfluss der Dämpfung zu eliminieren, wobei die Anweisung zu benutzen ist, welche Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837» S. 58 ff. zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel gegeben hat, in welcher man die Gesetze entwickelt findet, nach denen die Dämpfung auf den Stand und die Schwingungsdauer der Nadel wirkt. Es sollen hier die verschiedenen Beobachtungsmethoden einzeln, bei allen aber nur kleine Schwingungen der Nadel, betrachtet werden.

Beobachtungen der ersten Elongation.

1. Beobachtet man bei galvanischen Messungen bloss die erste Elongation, welche die Magnetnadel nach dem Eintritt eines constanten Stroms macht, so ist bekanntlich diese Elongation, wenn keine Dämpfung stattfindet, das Doppelte derjenigen Ablenkung der

Nadel, bei welcher sie unter der Einwirkung jenes Stroms im Gleichgewicht beharren würde; findet dagegen Dämpfung Statt, so wird die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus der beobachteten ersten Elongation x der Nadel auf folgende Weise bestimmt:

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}} \quad *) ,$$

wofür bei kleinen Werthen von λ gesetzt werden kann:

$$E = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \lambda x .$$

2. Beobachtet man bei galvanischen Messungen die erste Elongation, nachdem die ruhende Nadel durch einen momentanen Strom (durch einen Inductionsschoss) in Bewegung gesetzt worden, so kommt es wesentlich darauf an, aus der beobachteten Elongation der Nadel $= x$ die Geschwindigkeit herzuleiten, welche jener momen-

*) Für den Stand der schwingenden Nadel $= x$ am Ende der Zeit $= t$ hat man ohne Dämpfung den Ausdruck:

$$x = p + A \sin \frac{\pi}{T} (t - B) ,$$

wo T die Schwingungsdauer bezeichnet; mit Dämpfung dagegen

$$x = p + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cdot \sin \frac{\pi}{\tau} (t - B) ,$$

wo τ die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung ausdrückt und durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{T'T'} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau} .$$

Siehe «Resultate» 1837. S. 74. 75, wo ε dasselbe bezeichnet, was hier $\frac{\lambda}{\tau}$ und T' dasselbe, was hier τ . Wird nun zum Anfangspunkt der Zeit t derjenige Augenblick gewählt, wo der constante Strom die Nadel zu bewegen beginnt, wo also die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = 0$ und hieraus $\tan\left(-\frac{\pi}{\tau} B\right) = \frac{\pi}{\lambda}$ folglich: $-B = \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{2} \tau - \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}$; und wird ferner der bisherige Stand der Nadel zum Anfangspunkt der Elongation x genommen, also $x = 0$ für $t = 0$, so erhält obige Gleichung folgende Form:

$$x = - \frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} t - \arctan \frac{\lambda}{\pi} \right)$$

wo $-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = E$ den neuen Ruhestand der Nadel unter dem Einflusse des constanten Stroms bezeichnet; folglich für den Augenblick der ersten Elongation $t = \tau$, mit Rücksicht auf $\cos\left(\pi - \arctan \frac{\lambda}{\pi}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}}$

$$x = - \frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} \cdot (1 + e^{-\lambda}) = E (1 + e^{-\lambda})$$

folglich

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}} .$$

tane Strom der Nadel ertheilt hatte. Diese Geschwindigkeit C ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$C = x \cdot \frac{\pi}{T} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi}} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda} \quad *) ,$$

wo T die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet, wenn keine Dämpfung stattfindet. Für kleine Werthe von λ kann man setzen

$$C = \frac{\pi}{T} x + \frac{1}{2} \frac{\pi}{T} \lambda x .$$

Methode der Multiplication.

1. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden constanten Stroms, nicht bloss die erste Elongation, sondern lässt man die Nadel hin- und herschwingen, indem man am Ende jeder Schwingung die Richtung des Stroms im Multiplicator wechselt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der auf einander folgenden Schwingungsbogen, welche mit $x_1, x_2, x_3 \dots$ bezeichnet werden, so ergibt sich hieraus die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus folgenden Gleichungen:

*) Durch Differentiation der Gleichung in der vorhergehenden Note:

$$x = p + Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} t} \sin \frac{\pi}{\tau} (t - B) \text{ erhält man:}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} t} \sin \frac{\pi}{\tau} (t - B) + \frac{\pi}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} t} \cos \frac{\pi}{\tau} (t - B) .$$

Rechnet man nun die Zeit t von demjenigen Augenblicke an, wo der momentane Strom auf die Nadel wirkt und ihr die Geschwindigkeit $= C$ ertheilt, so ist $B = 0$ und $\frac{dx}{dt} = C$ für $t = 0$; folglich $\frac{\pi}{\tau} A = C$ oder $A = \frac{\tau}{\pi} C$. Setzt man nun zur Vereinfachung den ursprünglichen Stand der Nadel $p = 0$, so erhält man

$$x = \frac{\tau}{\pi} Ce^{-\frac{\lambda}{\pi} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t ,$$

folglich für das Ende der ersten Elongation, für welches $\frac{dx}{dt} = 0$ und also $\operatorname{tang} \frac{\pi}{\tau} t = \frac{\pi}{\lambda}$, $t = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}}$,

$$x = C \cdot \frac{\tau}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}} .$$

Nun ist aber $\frac{\tau}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = \frac{T}{\pi}$, wie sich aus der oben angeführten Gleichung $\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{T^2} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau}$ ergibt, folglich ist

$$x = C \cdot \frac{T}{\pi} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}} \text{ oder } C = x \frac{\pi}{T} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}} .$$

$$\begin{aligned}
-\frac{x_1}{E} &= 1 + e^{-\lambda} \\
+\frac{x_2}{E} &= 2 + 3e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} \\
-\frac{x_3}{E} &= 2 + 4e^{-\lambda} + 3e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda} \\
+\frac{x_4}{E} &= 2 + 4e^{-\lambda} + 4e^{-2\lambda} + 3e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda} \text{ *)}
\end{aligned}$$

Je grösser λ ist, desto schneller nähert sich $\frac{x}{E}$ einem Grenzwerte, für welchen man folgenden Ausdruck erhält:

$$\pm \frac{x}{E} = \frac{4}{1 - e^{-\lambda}} - 2;$$

folglich findet man, wenn man die Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus den übereinstimmenden Wer-

*) Es gilt hier bis zum Ende der ersten Elongation dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 345, nämlich:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \arctan \frac{\lambda}{\pi}\right),$$

also im Augenblicke der ersten Elongation für $t = \tau$, $x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} (1 + e^{-\lambda})$. In diesem Augenblicke, wo die erste Schwingung endigt und die zweite beginnt, wird der Strom im Multiplicator gewechselt, wodurch der bisherige Ruhestand der Nadel $-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}$ in $+\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}$ verwandelt wird; die Ablenkung der Nadel von ihrem Ruhestande, welche am Ende der ersten Schwingung $x + \frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}$ $= -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} \cdot e^{-\lambda}$ war, verwandelt sich dadurch in $= -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} (2 + e^{-\lambda})$, woraus sich für die Dauer der zweiten Schwingung, von $t = \tau$ bis $t = 2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + A(2 + e^{-\lambda})e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - \tau)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \arctan \frac{\lambda}{\pi}\right)$$

ergiebt, also am Ende der zweiten Elongation, für $t = 2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} (1 + 2 \cdot e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}).$$

Eben so erhält man für die Dauer der dritten Schwingung von $t = 2\tau$ bis $t = 3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + A(2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \arctan \frac{\lambda}{\pi}\right)$$

also am Ende der dritten Elongation, für $t = 3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} (1 + 2e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda})$$

u. s. w. Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t = 0$, $t = \tau$, $t = 2\tau$, $t = 3\tau$ u. s. w. unter einander

$$\begin{aligned}
&0 \\
&-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} (1 + e^{-\lambda}) \\
&+\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} (1 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}) \\
&-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} (1 + 2e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda})
\end{aligned}$$

so geben die Unterschiede zweier auf einander folgender Werthe von x , der Reihe nach, die gesuchten Schwingungsbogen x_1 , x_2 , x_3 , worin $\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = E$ zu setzen ist.

then x der letzten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}.$$

2. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden momentanen Stroms, nicht bloss die erste Elongation, nachdem die ruhende Nadel in Bewegung gesetzt worden ist, sondern lässt man die Nadel mehrmals hin- und herschwingen, indem man jedes Mal in dem nächsten Augenblicke, wo die Nadel wieder ihre ursprüngliche Stellung passiert, denselben momentanen Strom zur Beschleunigung der Nadel in verkehrter Richtung durch den Multiplicator gehen lässt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der Schwingungsbogen, welche der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3 \dots$ bezeichnet werden, so ergibt sich hieraus die Geschwindigkeit C , welche jener momentane Strom der Nadel jedesmal ertheilt, auf folgende Weise. Setzt man

$$B = C \cdot \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}, \text{ so ist:}$$

$$+ \frac{x_1}{B} = 1$$

$$- \frac{x_2}{B} = 2 + e^{-\lambda}$$

$$+ \frac{x_3}{B} = 2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} \dots *)$$

*) Für die erste Schwingungsdauer von $t = 0$ bis $t = \tau$ gilt dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 346, nämlich:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C e^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

folglich für den Augenblick der ersten Elongation, für welchen $t = \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} = \frac{T}{\tau}$ war, $x = \frac{T}{\pi} \cdot C e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}$. Für das Ende der

Schwingungsdauer, wo $t = \tau$ ist, ergibt sich $\frac{dx}{dt} = -C e^{-\lambda}$. In diesem Augenblicke nun wird die Geschwindigkeit der Nadel durch den erneuten momentanen Strom um $-C$ geändert, d. i. sie wird verwandelt in $-C(1 + e^{-\lambda})$, woraus sich nun für die zweite Schwingungsdauer, von $t = \tau$ bis $t = 2\tau$, ergibt:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C(1 + e^{-\lambda}) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-\tau)} \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

folglich für den Augenblick der zweiten Elongation, für welchen

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}, \sin \frac{\pi}{\tau} t = -\frac{T}{\tau} \text{ ist, } x = -\frac{T}{\pi} C(1 + e^{-\lambda}) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Auch hier nähert sich $\frac{x}{B}$ desto schneller einem Grenzwerthe, je grösser λ ist, und es ergibt sich für diesen Grenzwert:

$$\frac{x}{B} = \frac{2}{1 - e^{-\lambda}};$$

folglich findet man, wenn man diese Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die Geschwindigkeit C , welche der zu messende momentane Strom der Nadel jedesmal ertheilt, aus den übereinstimmenden Werthen x der zuletzt beobachteten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$C = \frac{x}{2} \cdot \frac{\pi}{T} (1 - e^{-\lambda}) e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Methode der Zurückwerfung.

Es gehört hieher endlich noch die Anwendung auf die von Gauss angegebene Beobachtungsmethode, welche in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im J. 1838» S. 98 ff. beschrieben worden ist, welche auch darum von besonderer Wichtigkeit ist, weil sie eine scharfe und bequeme Methode an die Hand giebt, die Dämpfung zu messen, wenn sie stark ist, während die oben angeführte, auf der Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen begründete Methode bloss bei schwächerer Dämpfung zu empfehlen ist. Die genannte Messungsmethode eignet sich besonders dann, wenn man sich eines Galvanometers bedient, des-

Ebenso findet man für die dritte Schwingungsdauer von $t = 2\tau$ bis $t = 3\tau$,

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}) e^{-\frac{\lambda}{\pi} (t - 2\tau)} \cdot \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

u. hieraus für den Augenblick der dritten Elongation, für welchen $t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$,

$$\sin \frac{\pi}{\tau} t = + \frac{T}{\tau} \text{ ist, } x = + \frac{T}{\pi} \cdot C (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}, \text{ u. s. w.}$$

Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t = 0$, $t = \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$,

$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$, $t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$ u. s. w. unter einander, indem

man Kürze halber B statt $\frac{T}{\pi} C e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}$ setzt, nämlich:

$$\begin{aligned} & 0 \\ & + B \\ & - B (1 + e^{-\lambda}) \\ & + B (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}) \\ & \vdots \end{aligned}$$

so geben die Unterschiede je zweier auf einander folgender Werthe der Reihe nach die gesuchten Schwingungsbogen x_1 , x_2 , x_3 u. s. w.

sen Magnetnadel eine grosse Schwingungsdauer hat und nie mehr als wenige Grade von ihrem normalen Stande abgelenkt wird, wie dies bei einem mit Multiplicator versehenen Magnetometer der Fall ist. — Ist das Instrument mit keinem Dämpfer versehen, so wird der Einfluss der dennoch vorhandenen schwachen, vom Multiplicator herrührenden, Dämpfung mit andern Einflüssen durch die für diese Methode eigenthümliche Combination der Beobachtungen aus den Resultaten eliminiert; bei stärkerer Dämpfung dagegen bleibt zwar die Beobachtungsmethode wesentlich dieselbe, aber die Berechnung der Resultate aus den Beobachtungen muss eine Modification erleiden, wenn diese Resultate ganz übereinstimmen sollen mit denen, welche ohne Dämpfung erhalten worden wären.

Es besteht nun diese Methode wesentlich darin, dass man durch einen momentanen Strom die Nadel plötzlich in Bewegung setzt und ihre erste Elongation beobachtet, darauf in dem Augenblicke, wo die Nadel zum ersten Male wieder ihren ursprünglichen Stand passiert, wieder einen momentanen Strom auf sie wirken lässt, der aber, gleich allen folgenden, doppelt so stark ist, wie der erste. Dieser zweite Strom soll dieselbe Richtung wie der erste haben; alsdann wird die Nadel durch ihn in ihrer Bewegung nicht allein plötzlich gehemmt werden, sondern sogar eine Geschwindigkeit nach derselben Seite erhalten, von welcher sie herkommt. Man beobachtet sodann wieder die erste Elongation, welche die Nadel hierauf macht, die, ohne Dämpfung, der vorigen nahe gleich ist, und lässt die Nadel auf die andere Seite ihrer Ruhelage hinüberschwingen, und beobachtet hier auch noch die zweite Elongation. Erst wenn die Nadel von dieser andern Seite her ihre Ruhelage wieder passiert, lässt man einen momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, als das zweite Mal, wirken und wirft sie dadurch nach derselben Seite zurück, woher sie kommt, und beobachtet die erste und zweite darauf folgende Elongation, worauf man, sobald die Nadel wieder ihre Ruhelage passiert, den momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, wie das vorige Mal, wirken lässt, u. s. w. Die so beobachteten Elongationen ordnen sich nach Paaren abwechselnd positiver und negativer Elongationen, aus denen die Mittel genommen werden, wenn sie wenig von einander verschieden sind, wie dies bei geringer Dämpfung der Fall ist. Die Unterschiede dieser auf einander folgenden positiven und negativen Mittelwerthe werden

nahe gleich gefunden und geben ein Maass für die Intensität des momentanen Stroms, welcher gemessen werden soll.

Hierbei wurde vorausgesetzt, dass nur eine geringe Dämpfung stattfände. Es lässt sich aber dieselbe Methode auch bei starker Dämpfung anwenden und es lässt sich dann sogar noch eine grössere Genauigkeit erreichen; es erleidet aber dann die Ableitung der Resultate aus den Beobachtungen eine wesentliche Modification.

Zunächst möge bemerkt werden, dass bei einer starken Dämpfung der erste momentane Strom nicht genau mehr die Hälfte des folgenden sein soll, sondern, wenn m das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen bezeichnet, so soll der erste Strom der $(m + \frac{1}{m})^{\text{te}}$ Theil des folgenden sein. Wenn aber auch dieses Verhältniss nicht genau eingehalten wird, so leiden darunter die Beobachtungen nicht wesentlich, sondern man braucht nur die ersten Beobachtungen von der Berechnung der Resultate auszuschliessen, weil bei den folgenden Beobachtungen der Einfluss jener anfänglichen Unregelmässigkeit durch die Dämpfung selbst sehr schnell verschwindet. Man sieht dann, dass die correspondierenden Beobachtungen (nämlich die 1^{ste}, 5^{te}, 9^{te} u. s. w., oder die 2^{te}, 6^{te}, 10^{te} u. s. w., oder die 3^{te}, 7^{te}, 11^{te} u. s. w., oder die 4^{te}, 8^{te}, 12^{te} u. s. w.) sich sehr schnell 4 Grenzwerten nähern. Bezeichnet man sodann den Unterschied des ersten und dritten Grenzwertes mit b , den Unterschied des zweiten und vierten mit a ; so ist das Verhältniss von $a : b$ dem Verhältnisse zweier auf einander folgender Schwingungsbogen gleich, folglich:

$$\lambda = \log \text{nat} \frac{a}{b}.$$

Ferner ist die Geschwindigkeit c , welche der Nadel von jedem momentanen Strome, mit Ausnahme des ersten, ertheilt wird,

$$c = \frac{\pi}{2T} \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}},$$

wofür, wenn a und b wenig verschieden sind, d. h. bei geringerer Dämpfung,

$$c = \frac{\pi}{2T} \cdot \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}}$$

und bei noch kleinerer Dämpfung

$$c = \frac{\pi}{2T} (a + b)$$

gesetzt werden kann. Der Beweis ergibt sich ähnlich wie bei den

früheren Regeln. Rechnet man nämlich die Zeit t von dem Augenblicke an, wo der momentane Strom die Nadel nach der Seite der positiven Elongation zurückgeworfen hat, so ist x für die Dauer der beiden folgenden ungestörten Schwingungen

$$x = Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t.$$

Für die beiden beobachteten Elongationen x' und x'' ist $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t + \frac{\pi}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos \frac{\pi}{\tau} t$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$$

für den zweiten

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}.$$

Substituiert man diese Werthe für t in der Gleichung für x , so erhält man

$$x' = + \frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}}$$

$$x'' = - \frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}}$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 2\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch Einwirkung des Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau} Ae^{-2\lambda}$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 2\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $-c$ hinzugefügt, woraus sich für die Dauer der folgenden beiden Schwingungen

$$x = \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau} (t - 2\tau)} \sin \frac{\pi}{\tau} t$$

ergiebt. Für die beiden während dieses Zeitraums von $t = 2\tau$ bis $t = 4\tau$ beobachteten Elongationen x''' und x'''' ist $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau} \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau} (t - 2\tau)} \sin \frac{\pi}{\tau} t + \frac{\pi}{\tau} \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau} (t - 2\tau)} \cos \frac{\pi}{\tau} t$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$$

für den zweiten

$$t = 3\tau + \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}.$$

Substituiert man diese Werthe für t in der neuen Gleichung für x , so erhält man

$$x''' = + \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c \right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

$$x'''' = - \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c \right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 4\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch erneuerte Einwirkung des momentanen Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau} \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c \right) e^{-2\lambda},$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 4\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $+c$ hinzugefügt und dadurch bewirkt, dass die Nadel von nun an dieselbe Bewegung wieder erhält, als von Anfang für $t = 0$. Nun war aber die Geschwindigkeit für $t = 0$

$$= \frac{\pi}{\tau} A$$

also

$$\frac{\pi}{\tau} A = c + \frac{\pi}{\tau} \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c \right) e^{-2\lambda},$$

woraus

$$c = \frac{\pi}{\tau} A \left(1 + e^{-2\lambda} \right)$$

folgt. Substituiert man diesen Werth in obigen Ausdrücken für x'' und x''' , so findet man $x'' = -x'$, $x''' = -x''$, folglich

$$a = x' - x''' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

$$b = x'''' - x'' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

folglich:

$$\frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \cdot \frac{1 + e^{-2\lambda}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda}} = \frac{2Ae^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\lambda}{\pi}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \cdot \left(1 + e^{-2\lambda}\right)$$

woraus sich ergibt

$$c = \frac{\pi}{2\tau} \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)} \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc tang} \frac{\lambda}{\pi}}.$$

Nun ist oben S. 345 in der Note die Gleichung angeführt worden:

$$\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{TT} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau};$$

wonach folglich

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} \sqrt{1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}$$

und

$$c = \frac{1}{2} \frac{\pi}{T} \cdot \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\lambda}{\pi}}.$$

Zugleich ersieht man, dass

$$\frac{a}{b} = e^{\lambda} \text{ oder } \lambda = \log \text{ nat } \frac{a}{b},$$

woraus hervorgeht, dass man durch Messung von a und b zugleich eine genaue Bestimmung des auf die Schwingungsdauer reducierten Maasses der Dämpfung erhält, was besonders dann von Nutzen ist, wenn wegen zu schneller Abnahme der Schwingungsbogen aus Beobachtungen der letzteren keine genaue Bestimmung erhalten werden kann.

Zur Erläuterung der zuletzt entwickelten Beobachtungsmethode mögen diejenigen Beobachtungen dienen, welche zur Vergleichung der Widerstände zweier Copien des Jacobi'schen Grundmaasses nach dieser Methode gemacht und S. 251 schon erwähnt worden sind. Die erste Copie bestand aus einem nicht gefirnissten Drahte, welcher auf einem nicht gefirnissten Serpentinecylinder aufgewunden war, während die zweite Copie aus einem gefirnissten Drahte bestand, welcher auf einer gefirnissten Glasröhre aufgewunden war. Die Versuche zerfallen in fünf Reihen. Bei allen waren die Enden des Inductordrahts mit den Enden des Multiplicatordrahts auf dieselbe Weise verbunden. In der ersten Reihe wurden die Drähte der beiden Copien und der Inductor- und Multiplicatordraht auf die S. 204 unter (8) beschriebene, mit D bezeichnete Weise combinirt; in der zweiten Reihe auf die unter (7) beschriebene, mit B bezeichnete Weise; in der dritten Reihe auf die unter (6) beschriebene, mit A bezeichnete Weise, wobei die erste Copie die Stelle des Grundmaasses vertrat; die vierte Reihe war die Wiederholung der zweiten; in der fünften endlich wurden die Drähte auf die unter (9) beschriebene, mit C bezeichnete Weise combinirt. Die Versuche wurden begonnen, wenn die Galvanometernadel in Ruhe war. Der erste positive Inductionsstoss setzte die Nadel in Schwingung: die erste positive Elongation wurde nicht beobachtet, und eben so wurde auch die zweite negative Elongation nicht beobachtet.

In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser zweiten Elongation in positiver Richtung zu der Stelle gelangte, welche dem Ruhestande entsprach, erfolgte der zweite negative Inductionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer positiven Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Die darauf folgende dritte Elongation war daher wiederum eine negative und wurde, sowie auch die vierte positive Elongation, noch nicht beobachtet. In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser vierten Elongation in negativer Richtung zu der ihrem Ruhestande entsprechenden Stelle gelangte, erfolgte der dritte positive Inductionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer negativen Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Auf dieselbe Weise wurden die Versuche längere Zeit fortgesetzt und von jetzt an begonnen, die Elongationen der Nadel, wie sie an der Scale beobachtet wurden, der Reihe nach aufzuzeichnen. In den folgenden Tafeln sind die vier ersten aufgezeichneten Elongationen in horizontaler Linie neben einander gestellt worden, die 5^e aber unter die 1^{ste}, die 6^{te} unter die 2^{te} u. s. f. Endlich sind von den unter einander stehenden Beobachtungen die Mittelwerthe angegeben worden.

D.

775,8	436,6	199,6	538,2
775,7	436,3	199,5	537,9
775,0	435,9	198,9	537,3
774,6	435,4	198,5	537,2
774,6	435,4	198,8	537,2
774,2	435,3	198,5	537,1
774,0	435,1	198,2	536,8
773,8	434,7	197,9	536,6
773,5	434,4	197,6	536,6
774,0	434,0	197,5	536,0
774,52	435,31	198,50	537,09

B.

692,1	448,0	277,0	521,1
691,8	447,8	276,7	521,0
691,7	447,4	276,5	520,8
691,3	447,3	276,2	520,5
691,3	447,2	276,0	520,7
691,4	447,2	276,0	520,6
691,4	447,2	275,9	520,5
691,3	447,1	275,9	520,5
691,4	447,0	275,9	520,4
691,3	447,0	275,8	520,3
691,50	447,32	276,19	520,64

A.

691,9	447,7	276,9	521,0
691,6	447,7	276,8	520,9
691,7	447,7	276,8	521,0
691,8	447,6	276,7	521,1
691,8	447,8	276,8	521,0
691,8	447,8	277,0	521,1
691,8	447,8	276,9	521,1
691,6	447,6	276,8	520,8
691,3	447,3	276,4	520,7
691,0	446,9	275,9	520,1
691,63	447,59	276,70	520,88

B.

691,6	447,0	275,7	520,5
691,4	446,9	275,6	520,3
691,2	446,7	275,3	520,0
690,9	446,3	275,2	520,0
690,7	446,2	275,0	519,7
690,5	446,1	274,9	519,8
690,5	446,5	274,8	519,7
690,3	445,9	274,6	519,4
690,1	445,8	274,6	519,2
690,1	445,6	274,3	519,2
690,73	446,30	275,00	519,78

C.

615,8	459,3	350,2	506,2
615,6	459,2	350,1	506,1
615,2	459,0	349,8	505,8
615,1	458,8	349,4	505,6
614,8	458,4	349,2	505,3
614,4	458,1	349,1	505,2
614,2	458,1	348,8	505,0
614,1	458,0	348,8	504,9
613,9	457,8	348,7	504,8
613,8	457,6	348,2	504,3
614,69	458,43	349,23	505,32

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Scale 2218 Scalentheile betrug. Ferner ist zu beachten, dass die hier gebrauchte Inductorrolle von der früheren, S. 206 gebrauchten, verschieden ist. Die neue Inductorrolle hatte eine weit geringere Zahl von Umwindungen, aber von weit stärkerem Drahte, sodass ihr Widerstand viel kleiner ist, als der Widerstand der ersten Inductorrolle. Dieser Umstand hat bedeutenden Einfluss auf das Verhältniss der Beobachtungen *A*, *B*, *C*, *D* unter einander.

In der folgenden Tafel sind die Mittelwerthe aus den obigen Beobachtungen übersichtlich zusammengestellt und in der letzten Columnne die Differenz des ersten und dritten, sowie auch des zweiten und vierten Werthes für jede Versuchsreihe beigefügt, und es sind diese beiden Differenzen eben so wie S. 351 mit *a* und *b* bezeichnet worden.

<i>D.</i>	774,52	$a = 576,02$ $b = 101,78$
	435,34	
	198,50	
	537,09	
<i>B.</i>	691,50	$a = 415,31$ $b = 73,32$
	447,32	
	276,19	
	520,64	
<i>A.</i>	691,63	$a = 414,93$ $b = 73,29$
	447,59	
	276,70	
	520,88	
<i>B.</i>	690,73	$a = 415,73$ $b = 73,48$
	446,30	
	275,00	
	519,78	
<i>C.</i>	614,69	$a = 265,46$ $b = 46,89$
	458,43	
	349,23	
	505,32	

Die in dieser Tafel zusammengestellten Werthe von a und b bedürfen nun zunächst einer Correction, weil sie den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Elongationswinkel proportional sind. Mit Hülfe des gegebenen Abstandes des Spiegels von der Scale ist es leicht, sie auf Werthe zu reducieren, welche den Elongationswinkeln selbst proportional sind, und diese Reduction genügt bei der Kleinheit aller dieser Elongationen. Zu diesem Zwecke ist, wenn x den in Scalentheilen gegebenen Werth von a oder b bezeichnet, die Zahl x um

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{4436^2} = \frac{x^3}{59034288}$$

zu verkleinern. Nach dieser Reduction erhält man folgende Werthe für a und b .

	a	b
D.	572,78	101,76
B.	444,10	73,31
A.	413,72	73,28
B.	444,51	73,47
C.	265,14	46,89

Nimmt man nun die Mittel aus den beiden für B angeführten Werthen a und b , so erhält man folgende Zusammenstellung:

	a	b	$\log. \text{ nat. } \frac{a}{b} = \lambda$	$\frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}}$
A.	413,72	73,28	1,730902	768,22
B.	444,305	73,39	1,730814	769,23
C.	265,14	46,89	1,732454	492,44
D.	572,78	101,76	1,727884	1063,11

Die in der letzten Columne angegebenen Werthe können nun, wie S. 351 ff. gezeigt worden ist, als Maass der Stromstärke im Multiplicator dienen, d. h. als die S. 213 mit A, B, C, D bezeichneten Werthe betrachtet werden. Mit diesen Werthen erhält man dann endlich nach den daselbst aufgestellten Formeln:

$$\frac{AB - BC}{AB - AC} = 0,99765$$

$$\sqrt{\frac{AB - AD}{AB - BD}} = 0,99762$$

Im Mittel hiernach verhält sich also der Widerstand der ersten Copie zu dem der zweiten :

$$= 0,99764 : 1$$

D.

Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen.

Zur Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen soll von folgenden beiden Fundamentalsätzen der Lehre vom Elektromagnetismus und der Lehre von der Magnetolectricität ausgegangen werden.

Erster Satz. Das linearische Element eines galvanischen Stroms ds übt auf ein Element des magnetischen Fluidums μ eine bewegende Kraft aus, die dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional ist; aber es tritt dabei zugleich der ganz abweichende Umstand ein, dass die Richtung der Kraft nicht in der verbindenden geraden Linie, sondern senkrecht gegen die durch μ und die Richtung von ds gelegte Ebene ist, und dass ausserdem die Stärke der Kraft nicht von der Entfernung allein, sondern zugleich von dem Winkel abhängt, welchen r mit der Richtung von ds macht. Nennt man diesen Winkel θ , so ist

$$\frac{\sin \theta \cdot \mu ds}{rr.}$$

das Maass der bewegenden Kraft, welche ds auf μ ausübt, und eben so gross ist die von μ auf das Stromelement ds oder dessen ponderablen Träger ausgeübte Kraft, deren Richtung der ersteren entgegengesetzt parallel ist.

Anmerkung. Unter dem mit ds bezeichneten Stromelemente ist das Product seiner Länge α in die Intensität i des durchgehenden Stroms verstanden, also $ds = \alpha i$. — Dieser Fundamentalsatz des Elektromagnetismus ist hier wörtlich so wiedergegeben, wie ihn Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839» S. 1. 2 ausgesprochen hat.

Zweiter Satz. Wird das Element des magnetischen Fluidums μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft bewegt, welche nach dem ersten Satze auf das Stromelement $ds = \alpha i$ wirkt, so wird auf das lineare Element des Leiters α eine der Richtung des Stroms i parallele elektromotorische Kraft ausgeübt, deren Stärke durch den im ersten Satze gegebenen Ausdruck $\frac{\sin \theta \cdot \mu ds}{rr}$ dargestellt wird, wenn darin $ds = \alpha i$ mit αu vertauscht wird, also durch

$$\frac{\sin \theta \cdot \mu \alpha u}{rr}$$

Wird dagegen das Element des magnetischen Fluidums μ in einer andern Richtung bewegt, welche mit der oben bezeichneten den Winkel ψ macht, so ist dieser Ausdruck der Stärke der Kraft noch mit $\cos \psi$ zu multiplicieren.

Anmerkung. Führt man statt der beiden Winkel θ und ψ zwei andere Winkel ein, nämlich den Winkel φ , welchen die Richtung, nach welcher μ bewegt wird, mit r bildet, und den Winkel ε , welchen die Richtung von α mit der Normale einer durch r der Richtung, nach welcher μ bewegt wird, parallel gelegten Ebene macht, so verwandelt sich der Ausdruck $\frac{\sin \theta \cdot \mu \alpha u}{rr} \cdot \cos \psi$ in $\frac{\sin \varphi \cdot \mu \alpha u}{rr} \cos \varepsilon$. — Dieser letztere Ausdruck stimmt mit demjenigen überein, welchen man erhält, wenn man die in der ersten Abhandlung über «Elektrodynamische Maassbestimmungen» S. 345 angegebene elektromotorische Elementarkraft nach der Richtung des inducierten Elements α zerlegt. Der so erhaltene Ausdruck enthält zwar noch einen constanten Factor; dessen Werth aber von der Wahl des Maasses für die elektromotorische Kraft abhängt und für ein bestimmtes Maass $= 1$ ist.

Aus diesen beiden Sätzen werden folgende Bestimmungen abgeleitet.

1. Es findet eine solche Relation zwischen den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Kräften statt, dass, wenn zwei beliebig gelegene magnetische Elemente μ und μ' auf ein Stromelement $ds = \alpha i$ gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kräfte ausüben, auch ihre elektromotorischen Kräfte auf das lineare Element des Leiters α , wenn es bewegt wird, gleich sind. Dasselbe gilt, wenn für μ und μ' eine Gesammtheit von beliebig vertheilten magnetischen Elementen gesetzt wird. Hieraus folgt, dass, wenn der Erdmagnetismus an einem Orte gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kraft, wie ein entfernter Magnetstab, ausübt, die elektromotorische Kraft des Erdmagnetismus auf einen daselbst bewegten Inductor ebenfalls der des Magnetstabs gleich sei, wie auch der Magnetismus in der Erde vertheilt sein möge.

2. Wenn das Stromelement ds einem Kreisstrome angehört, so wird die auf der Kreisebene senkrechte Componente der elektromagne-

tischen Kraft, welche ds auf μ ausübt, erhalten, wenn $\frac{\sin \theta \cdot \mu ds}{rr}$ mit dem Cosinus des Winkels multipliciert wird, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet. Diese Componente heisse C .

Das Stromelement ds möge in seine Factoren zerlegt werden, nämlich in seine Stromintensität i und in seine Länge, welche als die Länge eines Kreiselements mit $ad\alpha$ bezeichnet wird, wenn a der Halbmesser des Kreises ist, dem es angehört, und α der Winkel, welchen der zugehörige Radius mit demjenigen Radius bildet, welcher mit μ in einer auf der Kreisebene senkrechten Ebene liegt. Bezeichnet man ferner mit b das von μ auf die Kreisebene gefällte Perpendikel und mit x den Abstand des Fusspunkts dieses Perpendikels vom Mittelpunkte, so ist

$$rr = aa + bb + xx - 2ax \cos \alpha$$

und man erhält für die ganze von ds auf μ ausgeübte Kraft den Ausdruck:

$$\frac{\sin \theta \cdot i\mu \cdot ad\alpha}{aa + bb + xx - 2ax \cos \alpha}.$$

Ferner ist der Cosinus des Winkels, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet:

$$\frac{a - x \cos \alpha}{r \sin \theta} = \frac{a - x \cos \alpha}{\sin \theta \cdot \sqrt{aa + bb + xx - 2ax \cos \alpha}}.$$

Das Product dieses Cosinus in obigen Ausdruck der ganzen Kraft giebt den Ausdruck für die gesuchte Componente C , nämlich:

$$C = i\mu \cdot ad\alpha \frac{a - x \cos \alpha}{(aa + bb + xx - 2ax \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach dem vorausgeschickten zweiten Satze, dem Grundgesetze der Magnetolectricität, ergibt sich hieraus die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt, wenn μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplication des Werthes, welchen C hat, wenn $i = -1$ ist, mit u , nämlich $-u\mu \cdot ad\alpha \frac{a - x \cos \alpha}{(aa + bb + xx - 2ax \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$; dagegen ergibt sich, wenn ds mit der Geschwindigkeit u in der nämlichen auf der Kreisebene senkrechten Richtung bewegt wird, die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt,

$$+ u\mu \cdot ad\alpha \frac{a - x \cos \alpha}{(aa + bb + xx - 2ax \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Entwickelt man ferner den obigen Ausdruck von C nach Potenzen von $\cos \alpha$, so erhält man:

$$C = \frac{i\mu}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \left\{ aad\alpha + (2aa - bb - xx) \frac{ax}{aa + bb + xx} \cdot \cos \alpha d\alpha \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (3aa - 2bb - 2xx) \frac{a^2x^2}{(aa + bb + xx)^2} \cdot \cos \alpha^2 d\alpha \right. \\ \left. + \frac{5}{2} (4aa - 3bb - 3xx) \frac{a^3x^3}{(aa + bb + xx)^3} \cdot \cos \alpha^3 d\alpha + \dots \right\}$$

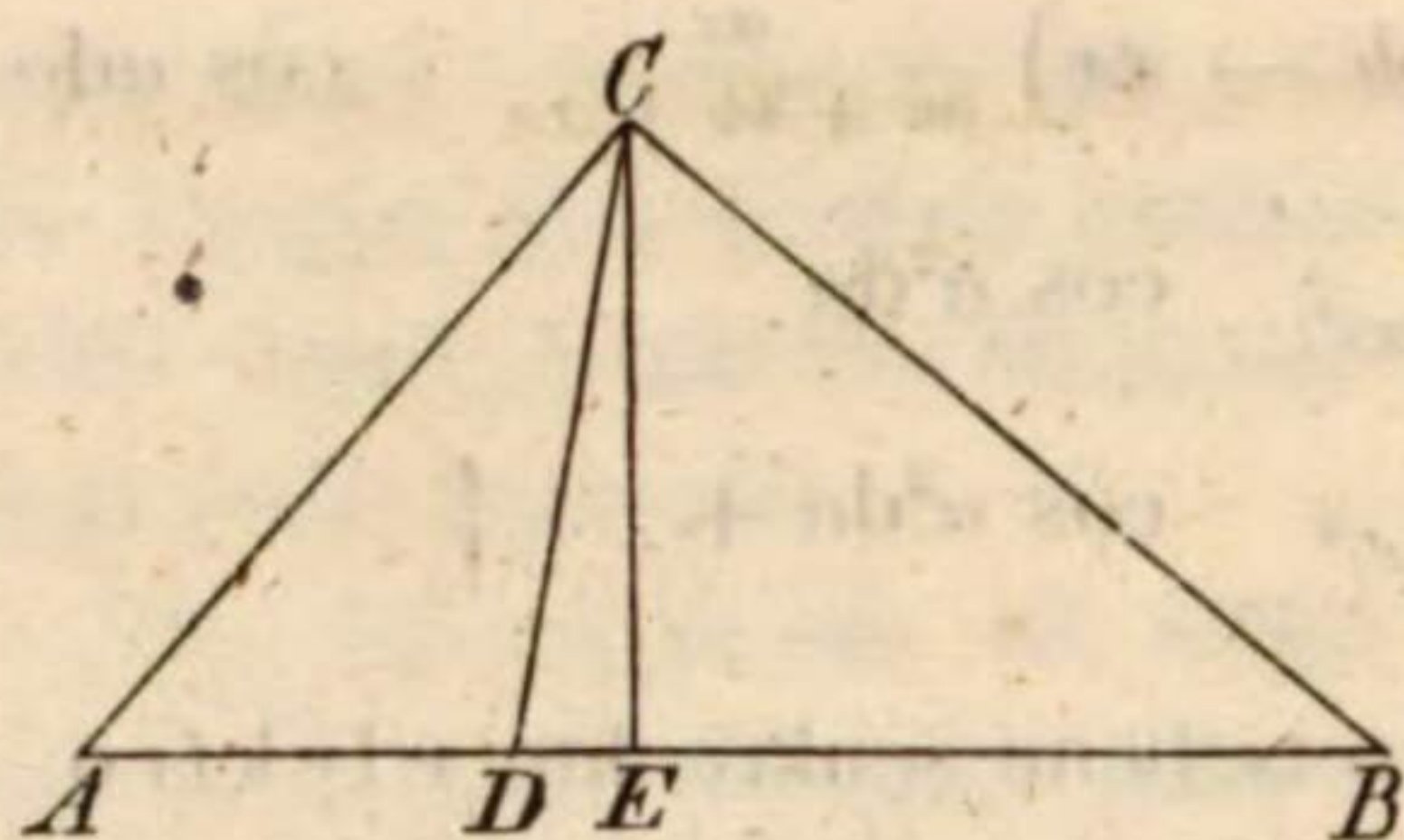
3. Der Ausdruck für die auf der Kreisebene senkrechte elektromagnetische Kraft, welche der ganze Kreisstrom auf μ ausübt, ergibt sich dann auf folgende Weise. Da der Halbmesser a und die Stromintensität i , wie auch b und x , für alle Kreiselemente gleich sind, so ist die gesuchte Kraft, oder die Summe aller auf die Kreisebene senkrechten elektromagnetischen Kräfte, welche alle Stromelemente auf μ ausüben,

$$i\mu \cdot a \int_0^{2\pi} \frac{a - x \cos \alpha}{(aa + bb + xx - 2ax \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} d\alpha \\ = \frac{i\mu}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ aa \int_0^{2\pi} d\alpha + (2aa - bb - xx) \frac{ax}{aa + bb + xx} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (3aa - 2bb - 2xx) \frac{a^2x^2}{(aa + bb + xx)^2} \int_0^{2\pi} \cos \alpha^2 d\alpha \right. \\ \left. + \frac{5}{2} (4aa - 3bb - 3xx) \frac{a^3x^3}{(aa + bb + xx)^3} \int_0^{2\pi} \cos \alpha^3 d\alpha + \dots \right\}$$

das ist:

$$\frac{2\pi aa \cdot i\mu}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} (3aa - 2bb - 2xx) \frac{xx}{(aa + bb + xx)^2} + \dots \right\} 1.$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass die Stromintensität hierin nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen ist, wenn man die Kreisebene $\pi aa = 1$ setzt, wo man findet, dass $i = 1$ sein muss, damit die in die Ferne (wo aa gegen $bb + xx$ verschwindet) auf μ senkrecht gegen die Kreisebene ausgeübte Kraft der in derselben Richtung von einem Magnete ausgeübten Kraft gleich werde, welcher das absolute Maass des Magnetismus besitzt und dessen Axe auf der Kreisebene normal ist. A sei der Mittelpunkt des Magnets, AB die Richtung seiner Axe, das Element μ befinde sich in C. ABC sei ein bei C rechtwinkeliges Dreieck und $AD = \frac{1}{3} AB$; so ist nach einem



bekannten Satze («Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 33. 34) CD die Richtung der auf μ wirkenden Kraft und ihre Stärke ist $\frac{\mu}{AC^3} \cdot \frac{CD}{AD}$. Fällt man CE perpendicular auf AB so ist die der Axe des Magnets parallele Componente $\frac{\mu}{AC^3} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{ED}{CD} = \frac{\mu}{AC^3} \cdot \frac{ED}{AD}$. Nun sind AE und CE die oben mit b und x bezeichneten Linien, wonach $AC = \sqrt{bb + xx}$; $AD = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} \frac{AC^2}{AE} = \frac{bb + xx}{3b}$ und $ED = AE - AD = \frac{2bb - xx}{3b}$; folglich die gesuchte Kraft

$$\mu \cdot \frac{2bb - xx}{(bb + xx)^{\frac{5}{2}}}.$$

Wird dagegen in obigem Ausdrucke $\pi aa = 1$ und $\frac{aa}{bb + xx} = 0$ gesetzt, so erhält man

$$i\mu \cdot \frac{2bb - xx}{(bb + xx)^{\frac{5}{2}}},$$

woraus sich ergibt, dass $i = 1$ sein müsse, wenn der die Flächeneinheit umlaufende Strom dem absoluten Maasse des Magnetismus gleich wirken soll. Diese Stromintensität ist aber das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei den Anwendungen der obigen elektromagnetischen Gesetze die Stromintensitäten nach dem festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen sind.

4. Der Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche μ auf den ganzen Kreis ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u in senkrechter Richtung auf die Kreisebene bewegt wird, ergibt sich auf folgende Weise. Aus dem vorausgeschickten zweiten Satze ergab sich die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplication von u in den Werth von C , wenn darin $i = -1$ gesetzt wird, nämlich:

$$\begin{aligned} & - \frac{\mu u}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ aada\alpha + (2aa - bb - xx) \frac{ax}{aa + bb + xx} \cdot \cos \alpha d\alpha \right. \\ & \quad + \frac{3}{2} (3aa - 2bb - 2xx) \frac{a^2 x^2}{(aa + bb + xx)^2} \cdot \cos \alpha^2 d\alpha \\ & \quad \left. + \frac{5}{2} (4aa - 3bb - 3xx) \frac{a^3 x^3}{(aa + bb + xx)^3} \cdot \cos \alpha^3 d\alpha + \dots \right\} \end{aligned}$$

Die Summe der von μ auf alle Kreiselemente ausgeübten elektromotorischen Kräfte folglich:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\mu u}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \left\{ aa \int_0^{2\pi} d\alpha + (2aa - bb - xx) \frac{ax}{aa + bb + xx} \int_0^{2\pi} \cos \alpha^2 d\alpha \right. \\
 & \quad + \frac{3}{2} (3aa - 2bb - 2xx) \frac{a^2 x^2}{(aa + bb + xx)^2} \int_0^{2\pi} \cos \alpha^2 d\alpha \\
 & \quad \left. + \frac{5}{2} (4aa - 3bb - 3xx) \frac{a^3 x^3}{(aa + bb + xx)^3} \int_0^{2\pi} \cos \alpha^3 d\alpha + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

das ist:

$$- \mu u \frac{\pi aa}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ 2 + \frac{3}{2} (3aa - 2bb - 2xx) \frac{xx}{(aa + bb + xx)^2} + \dots \right\} \text{II.}$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass dieser Werth die elektromotorische Kraft nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse ausdrückt. Setzt man nämlich in diesem Werthe $b = 0$, so ist die lineare Geschwindigkeit u des Elements μ identisch mit einer Drehungsgeschwindigkeit $\gamma = \frac{u}{x}$ um den gegen x senkrechten Kreisdurchmesser, wofür dann wieder, ohne Aenderung der elektromotorischen Kraft, die entgegengesetzte Drehungsgeschwindigkeit des Kreises $-\gamma$ um die nämliche Axe gesetzt werden kann. Der Ausdruck der elektromotorischen Kraft von μ auf den mit der Geschwindigkeit $-\gamma$ gedrehten Kreis ist also

$$- \mu \gamma \frac{\pi aax}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 2 + \frac{3}{2} (3aa - 2xx) \frac{xx}{(aa + xx)^2} + \dots \right\}$$

und ist daher auf den mit der Geschwindigkeit $+\gamma$ gedrehten Kreis, wenn μ aus der Ferne wirkt, wo aa gegen xx verschwindet, $-\mu \gamma \frac{\pi aa}{xx}$. Hieraus ergibt sich die Summe der beiden elektromotorischen Kräfte, wenn erstens $\mu = +m$ und $x = R + e$ und zweitens $\mu = -m$ und $x = R - e$, d. i., die elektromotorische Kraft eines Magnets $M = 2em$, welcher aus der Ferne R wirkt,

$$- m \gamma \frac{\pi aa}{(R + e)^2} + m \gamma \frac{\pi aa}{(R - e)^2} = M \gamma \frac{2\pi aa}{R^3}$$

Macht man nun die Drehungsgeschwindigkeit γ des Kreises so gross, dass seine Projection auf eine gegen x normale Ebene in der Zeiteinheit um die Flächeneinheit sich ändert, d. i. $\gamma \pi aa = 1$, so findet man, dass obiger Werth der elektromotorischen Kraft $= 4$ sein müsse, damit

M den Stabmagnetismus bezeichne, welcher der Einheit des Erdmagnetismus, dessen Richtung mit x parallel ist, gleich wirkt. Wenn nämlich in der Richtung des Erdmagnetismus T eines Ortes in dem Abstände R ein gleich gerichteter Magnet M liegt, so ist nach magnetischen Maassbestimmungen die Wirkung von M der Wirkung von T an jenem Orte gleich, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = T$$

ist. M bezeichnet also den der Maasseinheit des Erdmagnetismus gleich wirkenden Stabmagnetismus, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = 1$$

ist, woraus hervorgeht, dass, wenn zugleich $\gamma\pi a a = 1$, der obige Werth der elektromotorischen Kraft auch $= 1$ sei. Diese elektromotorische Kraft ist aber selbst das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei Anwendungen des hier entwickelten magnetoelektrischen Gesetzes die elektromotorische Kraft nach dem angegebenen absoluten Maasse bestimmt wird.

Wir haben bisher die Kräfte betrachtet, welche ein Element eines magnetischen Fluidums μ ausübt oder erleidet. Die Anwendung auf die Versuche fordert alle Elemente beider magnetischen Fluida, welche in einer Magnetnadel enthalten sind, in Rechnung zu bringen. Es leuchtet aber ein, dass man sich dabei nach Gauss an die Betrachtung der Elemente der idealen, an der Oberfläche vertheilten magnetischen Fluida halten könne, die gänzlich von einander geschieden sind. Ist die Summe der positiven Elemente $= +m$, so ist die Summe der negativen $= -m$; und bezeichnet man den Abstand des Mittelpunktes jener von dem Mittelpunkte dieser mit $2e$, so ist das Moment der Nadel $= 2em$ und die Linie e ist von einer messbaren Grösse. Auch leuchtet ein, dass, wenn alle positiven Elemente nahe beisammen liegen und eben so alle negativen, ihre Wirkung nahe dieselbe ist, wie wenn sie in ihren respectiven Mittelpunkten concentrirt wären. Es wird dann in der gebrauchten Nadel nur die Wirkung zweier Punkte in Rechnung kommen, nämlich desjenigen, in welchem alles nordmagnetische, und desjenigen, in welchem alles süd magnetische Fluidum concentrirt gedacht wird. Hiernach ergibt sich

5. die Vergleichung des Drehungsmoments, welches der Multiplikator auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel ausübt, mit

demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel weit entfernt wäre, folgendermassen. Die Meridianebene, in welcher die Nadel liegt, theilt den Multiplicator so, dass eine gleiche Zahl von Umwindungen zu beiden Seiten liegt. Zieht man in dieser Ebene eine horizontale Linie durch den Mittelpunkt des Multiplicators, so liege der Punkt, in welchem alles nordmagnetische Fluidum $+m$ concentrirt gedacht wird, in dieser Linie und der Abstand desselben vom Mittelpunkte heisse $+e$; der Abstand des in derselben Linie liegenden Punktes, in welchem alles süd magnetische Fluidum $-m$ concentrirt gedacht wird, heisse $-e$. a' und a'' seien der innere und äussere Durchmesser des Multiplicators und $2b'$ die Breite seines Querschnitts, welcher also $2(a'' - a')b'$ ist. Der Theil von diesem Querschnitte des ganzen Ringes, welcher auf eine Umwindung kommt, deren Halbmesser a ist und deren Ebene im Abstände b vom Mittelpunkte des Multiplicators liegt, werde mit $dadb$ bezeichnet: so ist nach (I.) das Product des Querschnitts einer Umwindung in die auf $+m$ von ihr ausgeübte Kraft:

$$+im \frac{2\pi aadadb}{(aa + bb + ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} (3aa - 2bb - 2ee) \frac{ee}{(aa + bb + ee)^2} + \dots \right\}.$$

Multipliziert man dieses Product mit dem von der Drehungsaxe auf die Richtung der Kraft gefällten Perpendikel e , so erhält man das Product des Querschnitts der Umwindung in das von ihr ausgeübte Drehungsmoment. Setzt man endlich in diesem Ausdrucke $-m$ für $+m$ und $-e$ für $+e$, so erhält man einen gleichen Werth für das Product desselben Querschnitts in das von der nämlichen Umwindung auf das negative Fluidum ausgeübte Drehungsmoment. Folglich ist das Product des von jener Umwindung auf die ganze Nadel ausgeübten Drehungsmoments in ihren Querschnitt, wenn man mit $M = 2em$ den Nadelmagnetismus bezeichnet:

$$iM \frac{2\pi aadadb}{(aa + bb + ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} (3aa - 2bb - 2ee) \frac{ee}{(aa + bb + ee)^2} + \dots \right\}$$

Da e ein kleiner Bruchtheil von a ist, so können alle Theile, welche die vierte oder höhere Potenzen zum Factor haben, weggelassen werden und man erhält dann

$$iM \frac{2\pi aadadb}{(aa + bb)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{aa - 4bb}{(aa + bb)^2} \cdot ee \right\}$$

Hieraus folgt nun die Summe der Producte des Querschnitts jeder Umwindung in das von derselben ausgeübte Drehungsmoment

$$iM \cdot 2\pi \int_{a'}^{a''} a da \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(aa + bb)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{aa - 4bb}{(aa + bb)^2} ee \right\}$$

$$= iM \left\{ 4\pi b' \cdot \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{\pi}{b'} \left(\frac{a''^3}{(a''a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot ee \right\}$$

Dividirt man diesen Ausdruck mit dem Producte aus dem Querschnitt einer Umwindung in die Zahl der Umwindungen, d. i. mit dem Querschnitte des ganzen Ringes $2(a'' - a')b'$; so erhält man das mittlere Drehungsmoment, welches eine Umwindung auf die Nadel ausübt, woraus durch Multiplication mit der Zahl der Umwindungen n das Drehungsmoment des Multiplicators auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel hervorgeht, nämlich:

$$iM \cdot 2n\pi \cdot \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'} \right\}$$

Für den Fall, wo b' gegen a' verschwindet und a' von a'' wenig verschieden ist, ergiebt sich $iM \cdot \frac{2n\pi}{a'}$ und a' ist in diesem Falle der Halbmesser des Multiplicators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplicators einer gegebenen Centralnadel den Ausdruck:

$$\log \frac{a'' + \sqrt{(a''a' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'}$$

und bezeichnet ihn mit r' , so ist das Drehungsmoment

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi.$$

Wird dagegen die Nadel vom Multiplicator weit entfernt, bleiben aber dabei $+m$ und $-m$ in derselben Geraden, in den Abständen $R + e$ und $R - e$ vom Mittelpunkte, so muss auf den Ausdruck C S. 362 für die gegen die Meridianebene senkrechte Kraft zurückgegangen werden, welche ein Element ds auf μ ausübt, indem darin $+m$ oder $-m$ für μ , und $R + e$ oder $R - e$ für x gesetzt wird. Man erhält dann für $+m$

$$im \cdot a d\alpha \frac{a - (R + e) \cos \alpha}{(aa + bb + (R + e)^2 - 2a(R + e) \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

für $-m$

$$- im \cdot a d\alpha \frac{a - (R - e) \cos \alpha}{(aa + bb + (R - e)^2 - 2a(R - e) \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Summe des ersteren mit $+e$ multiplicierten und des letzteren mit $-e$ multiplicierten Werthes giebt das von ds auf die Nadel ausgeübte

Drehungsmoment, nämlich, wenn man M für $2em$ schreibt und beachtet, dass a , b und e gegen R verschwinden,

$$iM \cdot a d\alpha \cdot \frac{a - R \cos \alpha}{(RR - 2aR \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{iM}{a} \left\{ \frac{aa}{RR} \cos \alpha d\alpha + \frac{a^3}{R^3} (3 \cos \alpha^2 - 1) d\alpha + \dots \right\}$$

folglich ist das von dem ganzen Kreise, zu welchem ds gehört, auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$= - \frac{iM}{a} \left\{ \frac{aa}{RR} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \frac{a^3}{R^3} \int_0^{2\pi} (3 \cos \alpha^2 - 1) d\alpha + \dots \right\} \\ = - \frac{\pi aa}{R^3} \cdot Mi,$$

weil die folgenden Glieder, welche die vierte oder höhere Potenzen von $\frac{a}{R}$ enthalten, weggelassen werden können.

Integriert man diesen mit $dadb$ multiplicierten Werth zwischen den Grenzen von $a = a'$ bis $a = a''$ und von $b = -b'$ bis $b = +b'$, so ist das Product dieses Integrals in $\frac{n}{2(a'' - a')b'}$ das vom Multiplicator auf die entfernte Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{1}{3} \frac{n\pi Mi}{R^3} \cdot \frac{a''^3 - a'^3}{a'' - a'} = \frac{n\pi Mi}{R^3} \cdot \frac{a'a' + a'a'' + a''a''}{3}$$

Für den Fall, wo a' von a'' wenig verschieden ist, ergibt sich

$$= \frac{n\pi a'a'}{R^3} \cdot Mi$$

und a' ist in diesem Falle der Halbmesser des Multiplicators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplicators einer entfernten Nadel den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{1}{3} (a'a' + a'a'' + a''a'')}$$

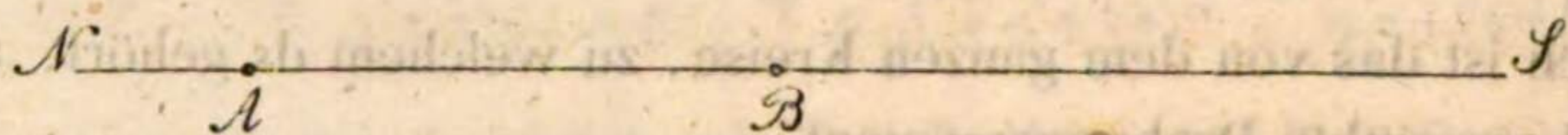
und bezeichnet ihn mit r'' , so ist das Drehungsmoment

$$= \frac{n\pi r''r''}{R^3} \cdot Mi,$$

Vergleicht man endlich den gefundenen Ausdruck des Drehungsmoments, welches der Multiplicator auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel ausübt, mit demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel weit entfernt wäre; so ergibt sich das Verhältniss

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi : \frac{n\pi r''r''}{R^3} \cdot Mi = 1 : \frac{r'r''r''}{2R^3}.$$

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den nach der ersten Methode Art. 14 ausgeführten Beobachtungen.



Die Gerade NS bezeichne die Richtung des horizontalen Erdmagnetismus, dessen Stärke an dem Orte $A = T'$, an dem Orte $B = T''$ sei. Eine geschlossene Kette bestehe aus zwei verticalen Ringen, deren Mittelpunkte A und B seien. Der Ring B , welcher den Multiplicator bildet, stehe fest, der Ring A , welcher den Inductor bildet, sei um seinen verticalen Durchmesser drehbar. Die Summe der Flächen, welche von allen Umwindungen des Ringes A begrenzt werden, sei S , und ψ bezeichne den Winkel, welchen die Normale der Ringebene mit der Richtung NS am Ende der Zeit t bildet; so ist die Projection von S auf eine auf NS senkrechte Ebene in diesem Augenblicke $= S \cos \psi$ und die Zunahme derselben in dem Zeitelemente dt ist $- S \sin \psi \cdot d\psi$. Hieraus ergibt sich der absolute Werth der vom Erdmagnetismus T' auf den Ring A ausgeübten elektromotorischen Kraft nach Art. 10

$$eE = - ST' \cdot \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \cdot E.$$

Der Integralwerth hiervon von dem Augenblicke, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, werde durch $e'E$ bezeichnet, so ist

$$e' = 2ST'.$$

Der von dieser elektromotorischen Kraft in der ganzen geschlossenen Kette hervorgebrachte Strom, dessen Intensität am Ende der Zeit t mit iJ bezeichnet wird, geht durch den Multiplicatorring B , welcher, so durchströmt, auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel, deren magnetische Axe mit NS zusammenfällt, ein Drehungsmoment ausübt, welches nach S. 368 auf folgende Weise ausgedrückt wird:

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi,$$

worin

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a' a'' + b' b')}}{a' + \sqrt{(a' a'' + b' b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a' a'' + b' b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a' a'' + b' b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b' b'} \right\}$$

Es bezeichnet hier n die Zahl der Umwindungen des Multiplicatorringes B , a' und a'' den kleinsten und grössten Halbmesser und

$2b'$ die Höhe desselben, M den Magnetismus der Nadel nach absolutem Maasse und $2e$ ist der Quotient $\frac{M}{m}$, wenn m die Menge des nordmagnetischen Fluidums ausdrückt, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet ist.

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergibt sich hieraus die Acceleration der Drehung der Nadel

$$= \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K}.$$

Bezeichnet man ferner den Integralwerth der Stromintensität iJ für den Zeitraum von dem Augenblicke an, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, mit $i'J$, so ist der Integralwerth der Acceleration für den nämlichen Zeitraum, d. i. die durch den Inductionstoss der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi'}{K}$$

woraus durch Multiplication mit $\frac{t'}{\pi}$ die Elongationsweite α

$$\alpha = \frac{2nt'}{r'} \cdot \frac{i'M}{K}$$

folglich $i' = \frac{\alpha Kr'}{2nMt'}$

erhalten wird, wo t' die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet.

Ist $1 : (1 + \theta)$ das Verhältniss, in welchem die magnetische Directions-kraft durch die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel hängt, vergrössert wird, und T'' die Stärke des horizontalen Erdmagnetismus am Orte des Multiplicators, so ist

$$t't' = \frac{\pi\pi K}{(1 + \theta) MT''}$$

oder

$$\frac{K}{Mt'} = \frac{(1 + \theta) T'' t'}{\pi\pi}$$

folglich

$$i' = \frac{(1 + \theta) T'' r' t'}{2n\pi\pi} \cdot \alpha.$$

Bezeichnet endlich wW den Widerstand der ganzen geschlossenen Kette, so ergibt sich für die Berechnung des Coefficienten w die Regel

$$w = \frac{e'}{i'} = \frac{n}{1 + \theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{\alpha r' t'}$$

was zu beweisen war.

Regel zur Berechnung des Widerstands aus den nach der zweiten Methode Art. 15 ausgeführten Beobachtungen.

Wird der feststehende dem magnetischen Meridiane parallele Ring B in sich geschlossen und die in seinem Mittelpunkte hängende Nadel in Schwingung gesetzt, so wird von dieser Nadel auf den Ring B eine elektromotorische Kraft ausgeübt, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann.

Bezeichnet $+m$ das nordmagnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $+e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; bezeichnet ferner $-m$ das süd magnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $-e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; und ist folglich der Nadelmagnetismus

$$M = 2em;$$

so wird, wenn γ die Drehungsgeschwindigkeit der Nadel ist, für kleine Elongationsweiten der Nadel, die elektromotorische Kraft, welche die Nadel auf eine Umwindung des Ringes B ausübt, deren Halbmesser $= a$ ist und deren Ebene in der Entfernung b vom Mittelpunkte des Ringes B liegt, nach S. 365 durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$- \gamma M \frac{\pi aa}{(aa + bb + ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 2 + \frac{3}{2} (3aa - 2bb - 2ee) \frac{ee}{(aa + bb + ee)^2} \right\}$$

indem dort erstens $\mu = +m$ und $u = +e\gamma$, zweitens $\mu = -m$ und $u = -e\gamma$ gesetzt und die Summe beider Werthe genommen wird. Die elektromotorische Kraft, welche die Nadel auf den ganzen Ring ausübt, dessen innerer und äusserer Halbmesser a' und a'' und dessen Höhe $2b'$ ist und der n Umwindungen besitzt, folgt hieraus $= eE$, wo $e =$

$$- \frac{n}{2(a'' - a')b'} \cdot \gamma M \pi \int_{a'}^{a''} a da \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(aa + bb + ee)^{\frac{3}{2}}} \left(2 + \frac{3}{2} (3aa - 2bb - 2ee) \frac{ee}{(aa + bb + ee)^2} \right)$$

oder
$$e = - \gamma M \cdot 2n\pi \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'} \right\}$$

oder
$$e = - \frac{2n\pi}{r'} \cdot M\gamma$$

wenn, wie oben,

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'} \right\}$$

gesetzt wird.

Der im Multiplicatorringe hierdurch inducierte Strom, dessen Intensität mit $-\gamma iJ$ bezeichnet werde, wo iJ die Intensität desjenigen Stroms ist, welcher von der elektromotorischen Kraft $\frac{2n\pi}{r'} M$ hervorgerufen werden würde, übt rückwärts auf die schwingende Nadel wieder ein Drehungsmoment aus, welches nach S. 368 auf folgende Weise ausgedrückt wird:

$$- \frac{2n\pi}{r'} \cdot M\gamma i$$

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergibt sich hieraus eine Retardation der Drehungsgeschwindigkeit γ

$$= - \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{M\gamma i}{K}.$$

Bezeichnet man endlich mit φ den kleinen Winkel, welchen die schwingende Nadel in irgend einem Augenblicke mit dem magnetischen Meridiane macht, also $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$, so ist das Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus T auf die Nadel ausübt,

$$= - MT\varphi$$

und dies verursacht eine Retardation der Geschwindigkeit γ

$$= - \frac{MT}{K} \varphi$$

wozu noch derjenige Theil der Retardation hinzuzufügen ist, welcher von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührt, und welcher, wenn θ die daraus entspringende Directionskraft der Nadel in Theilen ihrer magnetischen Directionskraft ausdrückt,

$$= - \frac{\theta MT}{K} \varphi$$

ist. Die ganze Retardation der Geschwindigkeit $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$ beträgt hiernach

$$- \frac{d\gamma}{dt} = (1 + \theta) \frac{MT}{K} \varphi + \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

woraus

$$\varphi = Ae^{-\frac{n\pi Mi}{Kr'}} t \sin t \sqrt{\left((1 + \theta) \frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}$$

folgt, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, t die von einem Durchgang der Nadel durch den Meridian gerechnete Zeit und

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left((1 + \theta) \frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}}$$

die Schwingungsdauer der Nadel t' , endlich

$$1 : e^{-\frac{n\pi Mit'}{Kr'}}$$

das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen ist. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses oder das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen ist also

$$\lambda = \frac{n\pi Mit'}{Kr'}.$$

Aus dieser Gleichung folgt zur Bestimmung der Intensität iJ des von der elektromotorischen Kraft $e = \frac{2n\pi M}{r'}$ in dem geschlossenen Ringe B hervorgebrachten Stroms

$$i = \frac{Kr'}{n\pi Mt'} \cdot \lambda$$

und hieraus endlich zur Bestimmung des Widerstands wW des Ringes B

$$w = \frac{e}{i} = \left(\frac{n\pi M}{r'}\right)^2 \cdot \frac{2t'}{K\lambda}.$$

Dieser Ausdruck von w lässt sich in eine andere Form bringen, wenn man beachtet, dass die Schwingungsdauer der Nadel

$$t' = \frac{\pi}{\sqrt{\left((1 + \theta) \frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}}$$

und

$$\lambda = \frac{n\pi Mi}{Kr'} \cdot t'$$

war, woraus

$$\frac{MT}{K} = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{(1 + \theta) t' t'}$$

sich ergibt, und wenn man ausserdem beachtet, dass, wenn

$$\frac{2M}{Tr'^3} = \tan v_0$$

gesetzt wird, v_0 nach bekannter Methode aus magnetometrischen Ablenkungsversuchen bestimmt werden kann. Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen erhält man

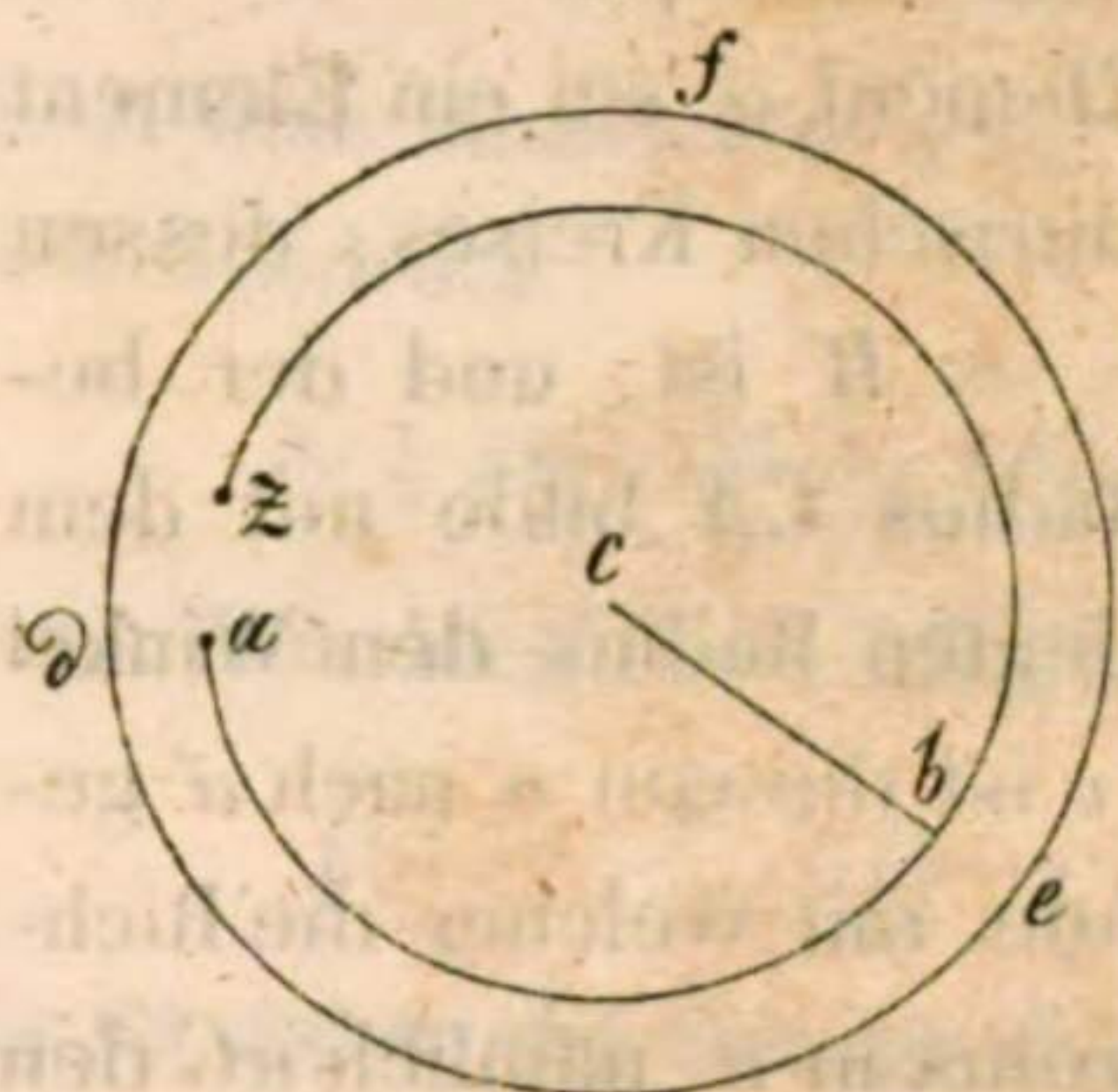
und folglich

$$\frac{2MM}{Kr'^2} = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{(1 + \theta) \ell \ell'} \cdot \tan v_0$$

was zu beweisen war.

E.

Regeln zur Berechnung des von einem Strome mit Gleitstelle inducierten Stroms.

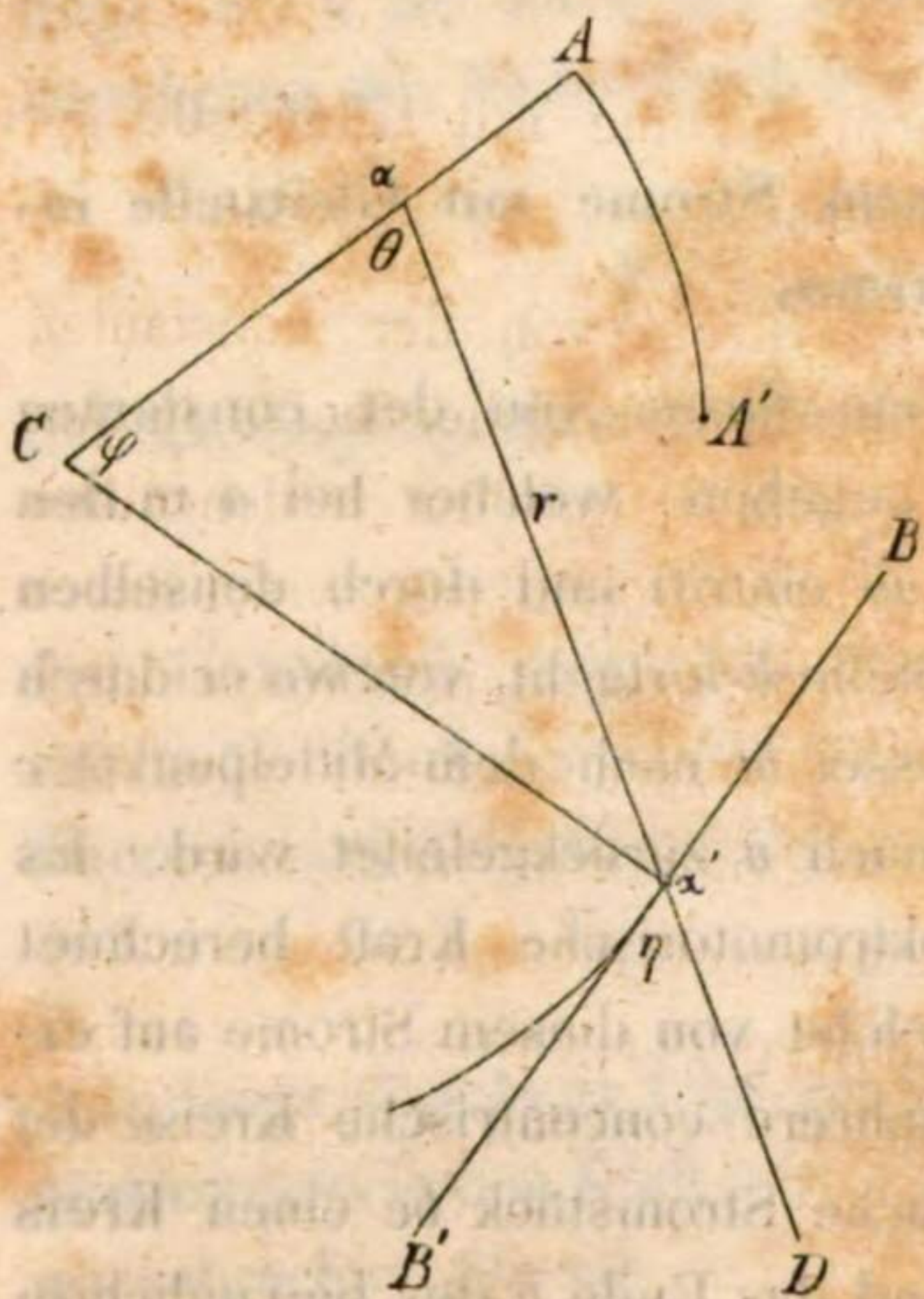


Es ist ein Strom von der constanten Intensität i gegeben, welcher bei a in den Kreisbogen ab eintritt und durch denselben bis zu der Stelle b fortgeht, von wo er durch den Halbmesser bc nach dem Mittelpunkte c und von c nach a zurückgeleitet wird. Es soll die elektromotorische Kraft berechnet werden, welche von diesem Strome auf einen oder mehrere concentrische Kreise def ausgeübt wird, während das bewegliche Stromstück bc einen Kreis um c beschreibt, oder genauer, während das Ende b des beweglichen Stromstücks bc den Bogen abz durchläuft, welcher um den beliebig kleinen Zwischenraum za kleiner ist, als die ganze Peripherie. Es sind hierbei dreierlei Arten von elektromotorischen Kräften zu unterscheiden, nämlich 1) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche von den Elementen des beweglichen Stromstücks bc ausgeübt werden; 2) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die am Ende des Bogens ab in Folge des Fortrückens des beweglichen Stromstücks bc neu eintretenden Stromelemente ausüben; 3) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die an der Gleitstelle b von dem Bogen ab zu dem Halbmesser bc , oder von bc zu ba übergehende Elektrizität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie daselbst erleidet, ausübt.

Was die erste Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30 S. 367 der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft eines Elements α des beweglichen Stromstücks bc auf ein Element α' des inducierten Leiters def durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$= \frac{\alpha\alpha'}{rr'} i \left(\sin \theta \sin \eta \cos s - \frac{1}{2} \cos \theta \cos \eta \right) \cdot av \cos \theta'.$$

Die a. a. O. gegebene Erklärung der Buchstaben erhellt aus der Anwendung auf den vorliegenden Fall von selbst. Es sei nämlich C der Mittelpunkt des Kreisbogens $A'A$, durch welchen der inducierende Strom i von A' nach A geht, und der bewegliche Radius $CA = R$ bilde



das bewegliche Stromstück, durch welches derselbe Strom i von A nach C geht. Das inducierende Element α liege in diesem Radius in der Entfernung ρ vom Mittelpunkte C . Das inducierte Element α' sei ein Element eines concentrischen Kreises, dessen Halbmesser $= R'$ ist, und der bewegliche Radius CA bilde mit dem durch α' gelegten Radius den Winkel $\varphi = A C \alpha'$. r ist die von α nach α' gezogene Gerade, mit welcher die Richtung des Stroms in α , nämlich αC den Winkel $\alpha' \alpha C = \theta$ macht. Es leuchtet nun ferner ein, weil die Induction bloss von der relativen Bewegung der

beiden Elemente α und α' gegen einander abhängt, dass statt der Drehung von α um den Mittelpunkt C , wobei α' unverrückt bliebe, eine im Bogenwerthe gleiche, der Richtung nach entgegengesetzte Drehung von α' um denselben Mittelpunkt C gesetzt werden kann, wobei α unverrückt bleibt. Man setze also hiernach, dass das Element α' nach der Richtung der negativen Tangente $\alpha'B'$ mit der Geschwindigkeit v bewegt werde. Diese Richtung bildet mit der verlängerten r , d. i. mit $\alpha'D$ den Winkel $D \alpha' B' = \eta$. Da ferner α' selbst ein Element des Kreises ist, dessen Richtung mit der positiven Kreistangente $\alpha'B$ zusammenfällt, so ist der Winkel, den seine Richtung mit der verlängerten r macht, $\theta' = \eta + \pi$. Der Winkel s der beiden Ebenen endlich, welche durch r parallel der Stromrichtung in α und parallel der Richtung, in welcher α' verschoben wird, gelegt werden, ist $s = 0$, wenn θ und η entweder beide kleiner oder beide grösser als π sind, oder $s = \pi$, wenn der eine von den beiden Winkeln θ, η kleiner, der andere grösser als π ist. Setzt man daher für θ oder η , sobald sie grösser als π sind, ihre Ergänzungswinkel zu 2π , so wird immer $\cos s = +1$. Man erhält hiernach für obi-

ge

wor

Setzt
den A

Setzt m

Es ist d
liche E
auf das
 $= r'r' g$ endlich d
ElementeDas Produ
Summe der
Inducenten
 $vt = 2\pi R'$
man den Int
des InducentBesteht der in
windungen, der

gen Ausdruck

$$+ \frac{\alpha\alpha'}{rr} i \left(\sin \theta \sin \theta' - \frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' \right) \cdot av \cos \theta',$$

worin der Werth von θ immer kleiner, der von θ' grösser als π ist, ferner:

$$rr = R'R' + \varrho\varrho - 2R'\varrho \cos \varphi$$

$$r \sin \theta = R' \sin \varphi$$

$$r \cos \theta = \varrho - R' \cos \varphi$$

$$r \sin \theta' = \varrho \cos \varphi - R'$$

$$r \cos \theta' = -\varrho \sin \varphi.$$

Setzt man ausserdem $\alpha = -d\varrho$ und $\alpha' = R'd\varphi$, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$+ \frac{1}{2} avi \cdot R' \sin \varphi^2 d\varphi \cdot \left(1 - \frac{3R'}{rr} (R' - \varrho \cos \varphi) \right) \frac{\varrho d\varrho}{r^3}.$$

Setzt man hierin $rr = R'R' + \varrho\varrho - 2R'\varrho \cos \varphi$, so findet man

$$\int \left(1 - \frac{3R'}{rr} (R' - \varrho \cos \varphi) \right) \frac{\varrho d\varrho}{r^3} = -\frac{\varrho\varrho}{r^3} + \text{Const.}$$

Es ist daher die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sämtliche Elemente des beweglichen Stromstücks von $\varrho = R$ bis zu $\varrho = 0$ auf das inducierte Element α' ausüben, wenn $R'R' + RR - 2R'R \cos \varphi = r'r'$ gesetzt wird,

$$+ \frac{1}{2} avi \cdot RRR \cdot \frac{\sin \varphi^2 d\varphi}{r'^3};$$

endlich die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle inducierten Elemente des Kreises def , d. h. für alle Elemente von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$:

$$+ \frac{1}{2} avi \cdot RRR \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi^2 d\varphi}{r'^3}.$$

Das Product dieses Ausdrucks in die Zeit t ist der Integralwerth der Summe der elektromotorischen Kräfte für die Zeit t , oder für den vom Inducen in dieser Zeit durchlaufenen Weg vt . Setzt man folglich $vt = 2n\pi R'$, d. h. gleich der n fachen Länge der Kreisbahn, so erhält man den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für n Umdrehungen des Inducen:

$$+ ai \cdot n\pi RRRR' \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi^2 d\varphi}{r'^3}.$$

Besteht der inducierte Leiter nicht bloss aus einer, sondern aus m Umdrehungen, deren Halbmesser nicht merklich verschieden sind, so erhält

man die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche durch n Umdrehungen des Inducen-ten auf alle m Umwindungen des inducierten Leiters ausgeübt werden:

$$+ ai \cdot mn\pi RRR'R' \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi^2 d\varphi}{r'^3}$$

worin $r'r' = R'R'RR - 2R'R \cos \varphi$ zu setzen ist. Setzt man $R = kR'$, wo $k < 1$ ist, so erhält man

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{R'^3} \left\{ \frac{1}{(1+kk)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3k \cos \varphi}{(1+kk)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15}{2} \frac{kk \cos \varphi^2}{(1+kk)^{\frac{7}{2}}} + \frac{35}{2} \frac{k^3 \cos \varphi^3}{(1+kk)^{\frac{9}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{315}{8} \frac{k^4 \cos \varphi^4}{(1+kk)^{\frac{11}{2}}} + \dots \right\}$$

folglich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi^2 d\varphi}{r'^3} = \frac{\pi}{(1+kk)^{\frac{3}{2}} R'^3} \left\{ 1 + \frac{15}{8} \frac{kk}{(1+kk)^2} + \frac{315}{64} \frac{k^4}{(1+kk)^4} + \dots \right\}$$

Setzt man hierin wieder für k seinen Werth $\frac{R}{R'}$ und

$$R_0 = \frac{RRR'R'}{(RR + R'R)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{15}{8} \left(\frac{RR'}{RR + R'R} \right)^2 + \frac{315}{64} \left(\frac{RR'}{RR + R'R} \right)^4 + \dots \right\}$$

so erhält man für die gesuchte elektromotorische Kraft den Ausdruck

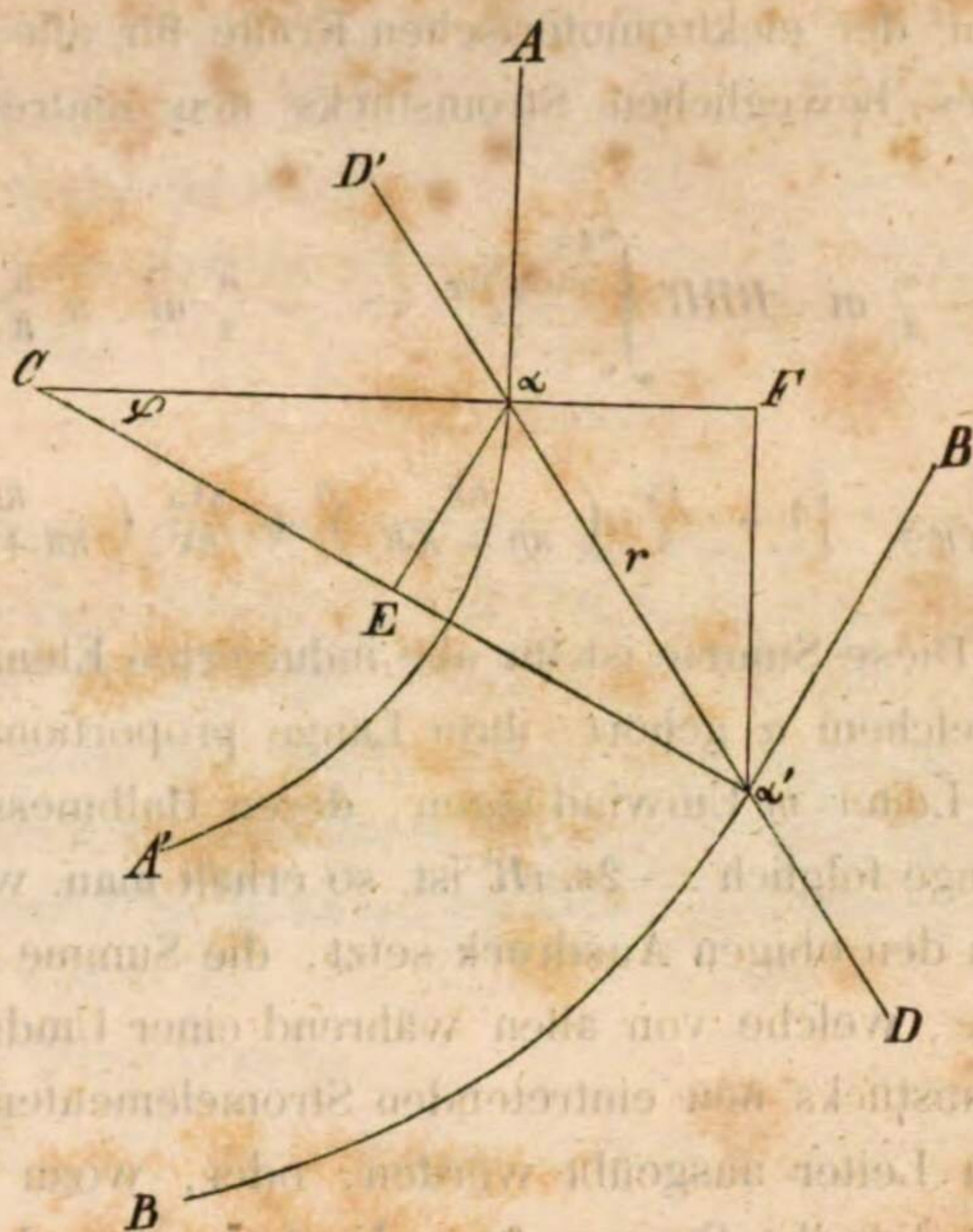
$$+ ai \cdot mn\pi R_0,$$

was zu beweisen war.

Was die zweite Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30, S. 367 der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft, welche ein Element des unbeweglichen Stromstücks α , in welchem die Stromstärke im Zeitelemente dt um di wächst, auf ein induciertes Element α' ausübt, durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$- \frac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} a \cos \theta \cos \theta' \cdot \frac{di}{dt}.$$

Es sind nun α und α' Elemente zweier Kreisbogen $A'\alpha$ und $B'\alpha'$, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C und die Halbmesser R und R' haben. $A'\alpha$ ist das unbewegliche, αC das bewegliche Stück des inducierenden Stroms; der Winkel $\alpha C \alpha' = \varphi$ ist der Winkel, welchen das bewegliche Stromstück mit dem Halbmesser des inducierten Elements α' bildet; α ist das in die Stromkette neu eintretende Leiterelement, während das Ende des beweglichen Stromstücks um $Rd\varphi = \alpha$ fortschreitet. Die Stromrichtung αA im Elemente α macht mit der Richtung $\alpha\alpha' = r$



den Winkel $D'\alpha A + \pi = \theta$; die Richtung $\alpha'B$ des inducierten Elements α' macht mit der Richtung der verlängerten r , d. h. mit $\alpha'D$ den Winkel $\alpha\alpha'B + \pi = \theta'$. Fällt man von α auf $C\alpha'$ das Perpendikel αE , und von α' auf die verlängerte $C\alpha$ das Perpendikel $\alpha'F$, so ist $\alpha\alpha'F = D'\alpha A = \theta - \pi$ und $\alpha'\alpha E = \alpha\alpha'B = \theta' - \pi$; folglich die Perpendikel

$$\alpha'F = R' \sin \varphi = r \cos \alpha\alpha'F = -r \cos \theta$$

$$\alpha E = R \sin \varphi = r \cos \alpha'\alpha E = -r \cos \theta'.$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha \cos \theta \cos \theta' = \frac{RRR'}{rr} \sin \varphi^2 d\varphi.$$

Setzt man diesen Werth in den obigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man dafür:

$$- \frac{\alpha'}{2} \frac{RRR'}{r^3} \sin \varphi^2 d\varphi \cdot a \frac{di}{dt}.$$

Setzt man $\frac{di}{dt} = \frac{i}{t}$, wo t die Zeit bezeichnet, in welcher die Stromstärke im inducierenden Elemente $\alpha = R d\varphi$ von 0 bis i wächst; so ist die elektromotorische Kraft des mit der Stromstärke i neu eintretenden Stromelements α das Product dieses Ausdrucks in die Zeit t :

$$- \frac{\alpha'}{2} ai \cdot \frac{RRR'}{r^3} \sin \varphi^2 d\varphi$$

und die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Strömelemente :

$$- \frac{\alpha'}{2} ai \cdot RRR' \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi^2 d\varphi}{r^3} = - \frac{\alpha'}{2} ai \cdot \pi \frac{R_0}{R},$$

wenn

$$R_0 = \frac{RRR'}{(RR + R'R')^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{45}{8} \left(\frac{RR'}{RR + R'R'} \right)^2 + \frac{315}{64} \left(\frac{RR'}{RR + R'R'} \right)^4 + \dots \right\}$$

gesetzt wird. Diese Summe ist für alle inducierten Elemente desselben Kreises, zu welchem α' gehört, ihrer Länge proportional. Bildet also der inducierte Leiter m Umwindungen, deren Halbmesser nahe $= R'$ sind, deren Länge folglich $= 2m\pi R'$ ist, so erhält man, wenn man diese Länge für α' in den obigen Ausdruck setzt, die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von allen während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Strömelementen auf den ganzen inducierten Leiter ausgeübt werden, oder, wenn man noch mit n multipliciert, dieselbe Summe für n Umdrehungen des beweglichen Stromstücks, vorausgesetzt, dass die Wirkung des plötzlichen Verschwindens aller eingetretenen Strömelemente am Ende jeder Umdrehung durch Lösung der inducierten Kette in diesem Augenblicke aufgehoben werde. Die gesuchte elektromotorische Kraft ist also

$$- ai \cdot mn\pi R_0,$$

was zu beweisen war.

Es bleibt also nur noch die dritte Art von elektromotorischen Kräften zu betrachten übrig, nämlich diejenigen, welche die an der Gleitstelle von dem unbeweglichen zum beweglichen Stromstück übergehende Elektrizität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie bei diesem Uebergange erleidet, ausübt. Alle hieraus sich ergebenden Elementarwirkungen sind aber, wie Art. 39 bewiesen worden ist, den aus der zweiten Art der elektromotorischen Kräfte sich ergebenden gleich; folglich findet diese Gleichheit auch für die Summe statt, für die also gleichfalls der soeben gefundene Ausdruck gültig ist.

Die ganze elektromotorische Kraft für die Dauer von n Umdrehungen des Inducen ten ist die Summe der drei gefundenen Ausdrücke, von denen der erste den beiden letzten entgegengesetzt gleich ist, und ist also

$$- ai \cdot mn\pi R_0$$

Bezeichnet man endlich mit T die Dauer von n Umdrehungen des Inducenten und mit w den Widerstand des inducierten Leiters, so erhält man zur Berechnung der Stärke i' des inducierten Stroms, im Vergleich mit der Stärke i des inducierenden Stroms, welcher eine Gleitstelle hat, folgende Gleichung:

$$\frac{i'}{i} = - \frac{a}{w} \cdot mn\pi \frac{R_0}{T},$$

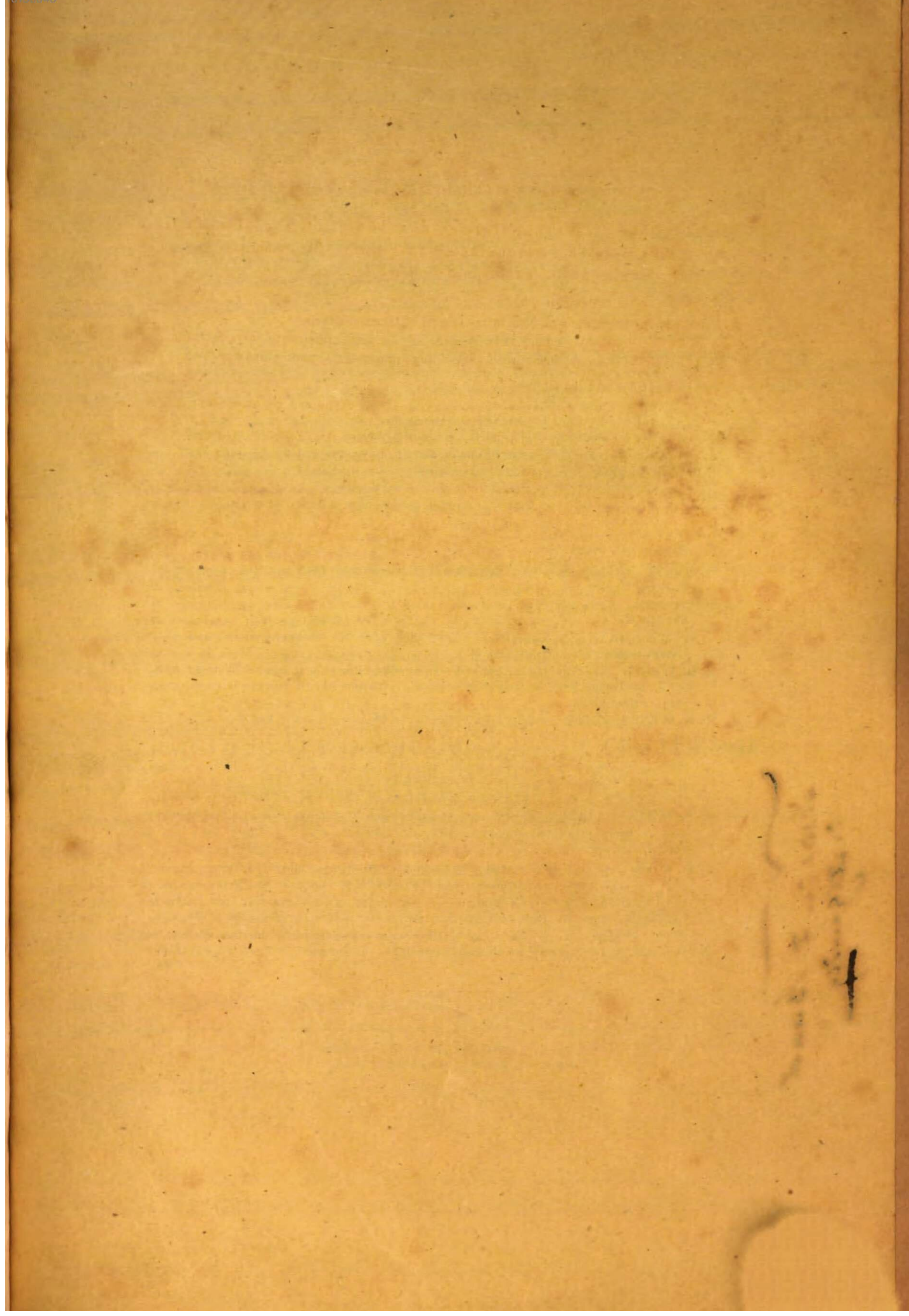
wo das negative Vorzeichen des zweiten Gliedes bedeutet, dass die Richtung des inducierten Stroms der Richtung des inducierenden entgegengesetzt ist, vorausgesetzt, dass durch die Drehung des Inducenten dem unbeweglichen Stromstücke immer neue Elemente zugefügt werden. Bei umgekehrter Drehung des Inducenten dagegen, durch welche dem unbeweglichen Stromstücke Elemente entzogen würden, würde, wie von selbst einleuchtet, das zweite Glied der Gleichung den entgegengesetzten Werth erhalten.

I n h a l t.

	Seite
I. Widerstandsmessungen nach einem gegebenen Grundmaasse, Art. 4—7. . .	199
II. Zurückführung der Widerstandsmessungen auf absolutes Maass, Art. 8—23. .	215
III. Beispiele der Anwendung des absoluten Widerstandsmaasses, Art. 24. 25. .	255
IV. Über die Principien verschiedener absoluter Maasssysteme in der Elektro- dynamik, Art. 26. 27.	259
V. Über den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen, Art. 28—36.	270
VI. Vergleichung des allgemeinen Princips der mathematischen Theorie indu- cierter elektrischer Ströme von Neumann mit den aus dem Grund- gesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetzen, Art. 37—39.	310

B e i l a g e n.

	Seite
A. Beschreibung eines bei Widerstandsmessungen zu gebrauchenden magne- tischen Inductors	335
B. Beschreibung des Galvanometers	337
C. Übersicht der Beobachtungsmethoden für galvanische Messungen mit Rück- sicht auf den Einfluss der Dämpfung	344
D. Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen	360
E. Regeln zur Berechnung des von einem Strome mit Gleitstelle inducierten Stroms	375



In der WEIDMANN'SCHEN BUCHHANDLUNG in Leipzig sind zu haben:

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe. Jahrgang 1849. gr. 8. In 3 Heften à 10 Ngr.

Inhalt des ersten Heftes:

W. WEBER, Bemerkung zu Neumanns Theorie inducirter Ströme.

LEHMANN, über einige quantitative Verhältnisse die den Verdauungsprocess betreffen.

FECHNER, über die mathematische Behandlung organischer Gestalten und Processe.

Inhalt des zweiten Heftes:

A. F. MÖBIUS, über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme.

A. W. VOLKMANN, über einige Probleme der Hämodynamik und deren Lösbarkeit.

EDUARD WEBER, über die Gewichtsverhältnisse der Muskeln des menschlichen Körpers im Allgemeinen.

MARCHAND, über das Auftreten und die Ermittlung des Arsens im thierischen Körper.

G. TH. FECHNER, über das Causalgesetz.

Inhalt des dritten Heftes:

D'ARREST, Mittheilungen über den zweiten Cometen von 1849 und den neuentdeckten Planeten Hygiea.

MARCHAND, vorläufige Mittheilung aus einer Untersuchung: über das Leuchten des Phosphors.

A. W. VOLKMANN, physiologische Untersuchung über die Abhängigkeit des Pulses der Lymphherzen vom Nervensysteme.

E. H. WEBER, über die Abhängigkeit der Entstehung der animalischen Muskeln von der animalischen Nerven, erläutert durch eine von ihm und Eduard Weber untersuchte Missbildung.

E. H. WEBER, Zusätze zu seinen Untersuchungen über den Bau der Leber.

ABHANDLUNGEN der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. In 4. broch.

Dieselben werden in Heften ausgegeben, und es sind bis jetzt erschienen:

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwicklung der Grösse $(1 - 2\alpha H + \alpha^2) - \frac{1}{2}$ nach den Potenzen von α . 12 Ngr.

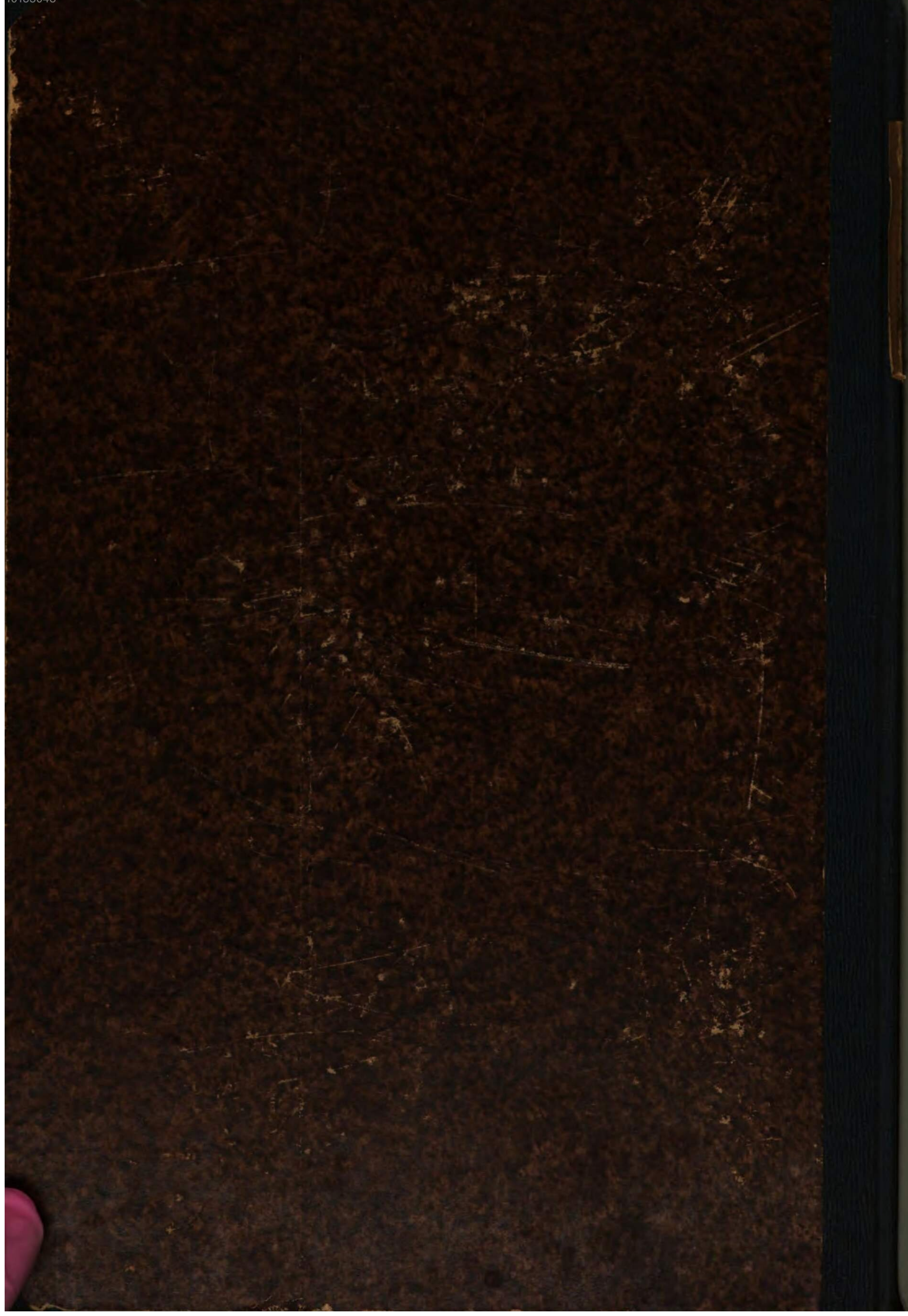
A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 10 Ngr.

A. SEEBECK, über die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe. 10 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. 1 Thlr.

Handwritten note:
Königliche
Sächsische
Gesellschaft
der Wissenschaften
zu Leipzig
1849



Weber, Wilh.

Elektrodynamische Maarsbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen Aus
den Abhandl. des malhem. phys. Cl. des k. sächs. Ges. d. Wiss. zu Lpzg.

Lpzg 1850

Phys.sp. 735 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10135048-7